

G. Legnani

# Robotica Industriale

Casa Ed. Ambrosiana - isbn 88-408-1262-8

<http://bsing.ing.unibs.it/~glegnani><http://robotics.ing.unibs.it>inviare commenti e suggerimenti a [giovanni.legnani@ing.unibs.it](mailto:giovanni.legnani@ing.unibs.it)

## Errata Corrige ed Ampliamenti

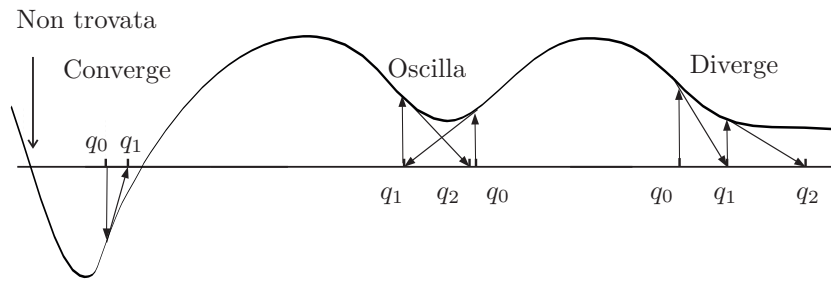
6 marzo 2022

pagina	riferimento	errata	corrige
19-20		a cavallo delle pagine 19-20 aggiungere: ... consentono un movimento relativo di traslazione rettilineo mentre i secondi consentono un movimento...	
46		Ellissi di manipolabilità: i diametri $d_i$ sono proporzionali <i>all'inverso</i> dei valori singolari $\sigma_i$ di $J$ . I valori singolari di $J$ sono la radice quadrata degli autovalori di $JJ^T$ . L'area dell'ellisse è <i>inversamente proporzionale</i> al determinante di $J$ . Le ellissi $dS = kJJ^T F_s$ sono di cedevolezza (inverso di quelle di rigidezza).	
52	ultima eq.	$\dots \operatorname{atan2}(x, y) \dots$	$\dots \operatorname{atan2}(x_p, y_p) \dots$
52	matrice $J$	$\delta$	$\partial$
57	eq.(2.17)	$S = [x, y, z]^T$	$S = [x, y, \psi]^T$
61	eq.(2.32)	$\beta = \operatorname{atan2}(v, u) \dots$ $= \operatorname{atan2}(x \cos \dots, z - h) - \dots$	$\beta = \operatorname{atan2}(u, v) \dots$ $= \operatorname{atan2}(z - h, x \cos \dots) - \dots$
62	eq.(2.34)	$(J^T M \dot{Q})$	$(J^T M \dot{J})$
65	3° riga §2.17	parallelo all'asse $x$	parallelo all'asse $y$
65	6° riga dal fondo	$\sqrt{u^2 + v^2}$	$\sqrt{u^2 + v^2}$
65	eq. (2.44) (2.45)	$z = l_3 \cos(\gamma) \sin(\beta)$	$z = (l_2 + l_3 \cos(\gamma)) \sin(\beta)$
66	eq. (2.47) de- nominatore eq. $t_c 2 =$	$-2l_1 z - (x^2 + \dots$	$-2l_1 z + (x^2 + \dots$
66	eq. (2.47)	l'equazione in $t_b$ è corretta e serve per determinare $\beta$ , mentre (per $\sin(\beta) \neq 0$ ) $\gamma$ si determina come $\gamma = \pm \operatorname{acos} \left( \frac{z}{l_3 \sin(\beta)} - \frac{l_2}{l_3} \right)$ per $\sin(\beta) = 0$ il robot si comporta come un robot SCARA in cui il primo link è lungo $l_1 + l_2$ ed il secondo è lungo $l_3$ (vedi §2.9.2)	
66	eq. (2.49)	$\gamma = 2 \operatorname{atan}(\sqrt{t_{c2}}) + k\pi$	$\gamma = 2 \operatorname{atan}(\pm \sqrt{t_{c2}})$
66	eq. (2.50) e poco dopo (3 volte)	$u^2 + y^2$	$u^2 + v^2$
66	eq. (2.51)	$\alpha = (-xy, \dots$	$\alpha = \operatorname{atan2}(-xv + yu, xu + yv)$ singolare per $-xv + yu = xu + yv = 0$

pagina	riferimento	errata	corrigere
67	eq. (2.53)	$l_2 + \dots$ $l_1 + \dots$	$0 = l_2 + \dots$ $0 = l_1 + \dots$
70	eq.(2.59)	$F_{mq}$	$F_{qm}$
70	eq.(2.59)	$F_q$	$(-F_q)$ (due volte) infatti se se sul robot agisce $F_q$ sulla trasmissione agisce $-F_q$ .
71	fig. 2.24	$F_{mq}$	$F_{qm}$
71	eq.(2.60)	$\dots - T^T F_q \dots$ infatti se se sul robot agisce $F_q$ sulla trasmissione agisce $-F_q$ . (Gli altri segni sono corretti)	$\dots T^T F_q \dots$
79	sotto matrice R	$X_r^T Z_r = \dots = 1$	$X_r^T X_r = \dots = 1$
91	nel riquadro	$= \left[ \begin{array}{c c} R_{10}^T & \\ \hline & \end{array} \right]$	$= \left[ \begin{array}{c c} R_{01}^T & \\ \hline & \end{array} \right]$
96	$R_{tras}(z \dots)$	$-\sin(\vartheta_y)$	$-\sin(\vartheta_z)$
99	ultima formula	$u_x = \dots - \frac{Z_z}{\dots}$	$u_x = \dots - \frac{Z_y}{\dots}$
125	2° formula	$\dots [W_{01(1)} + \dots$	$\dots [W_{01(0)} + \dots$
135	aggiungere la didascalia alla tabella di inizio pagina: Descrizione dei termini della eq.(6.2)		
136	$M_{34}$	elemento 1,3 $S_4$ aggiungere: $-\varphi_1 = \varphi_2 = -\varphi_4 = \varphi_5 = 90^\circ, \quad \varphi_3 = \varphi_6 = 0$	$-S_4$
136	§6.2.2 elenco	(vedi figura 6.2.2)	(vedi figura 6.5)
148		$M_{03} = \left[ \begin{array}{c c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array} \right]$	$M_{03} = \left[ \begin{array}{c c} -S_2 & \\ \hline & 1 \end{array} \right]$
152	5° eq. 6° eq. ultima eq.	$s_6 = -c_5(\dots) + s_5(\dots)$ $c_6 = \dots X_x$ $c_2 = \dots \Delta x - s_3 \dots$	$c_6 = +c_5(\dots) - s_5(\dots)$ $s_6 = \dots X_z$ $c_2 = \dots \Delta x + s_3 \dots$
153	fig.6.14	$\vartheta_2$ è indicato in maniera erronea (è def. in fig.6.13 ove tutti gli angoli valgono 0).	
155	righe 5 e 7	$M_{45}$	$M_{34}$
161	$M_{bp}$ (2 volte)	$(1 - c)$	$(1 - c_3)$
175	3° eq.	$W_{23(0)} = L_{23(0)} \dot{q}$	$W_{23(0)} = -L_{23(0)} \dot{q}$
175	fine pagina	$M_{0a} = \dots = \left[ \begin{array}{c c} & \\ \hline & 0 \end{array} \right]$	$M_{0a} = \dots = \left[ \begin{array}{c c} & \\ \hline & 1 \end{array} \right]$
176	7° riga	$\dot{P} = W_{03(a)} P$	$\dot{P} = W_{03(0)} P$
177	1° eq.	$\dots + L_{23(0)} \dot{q}_3$	$\dots - L_{23(0)} \dot{q}_3$
178	prima formula	$H = L\ddot{\alpha} + L^2\dot{\alpha}^2$	$H = L\ddot{q}_i + L^2\dot{q}_i^2$
178	ultima formula	$H_{03(0)} = \left[ \begin{array}{c c} 0 & \dots + l_1 \ddot{\beta} \cos \alpha \\ \hline & 0 \end{array} \right]$	$H_{03(0)} = \left[ \begin{array}{c c} 0 & \dots + l_1 \ddot{\beta} \sin \alpha \\ \hline & 0 \end{array} \right]$
180	1° eq.	$\left[ \begin{array}{c c} \dots \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$	$\left[ \begin{array}{c c} \dots -\ddot{\alpha} - \ddot{\beta} \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$

pagina	riferimento	errata	corrigere
181	eq. (6.13)	$\dot{S} = J\ddot{Q}$	$\dot{S} = J\dot{Q}$
183	fig. 6.33	$\alpha_2$	$-\alpha_2$ (dal link 1 al 2 ma nel verso opposto)
185	nota piè pagina	$-l_1s_1 - l_2s_{12} = -a$	$-l_1c_1 - l_2c_{12} = -a$
186		$a_x = -l_1c_1\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 - ((l_1c_1 + l_2c_{12})\dot{\alpha}_1 + l_2c_{12}\dot{\alpha}_2)\dot{\alpha}_3$ $a_y = -l_1s_1\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 - ((l_1s_1 + l_2s_{12})\dot{\alpha}_1 + l_2s_{12}\dot{\alpha}_2)\dot{\alpha}_3$	
202	prima eq §7.7.1	$H_{ok}J_k$	$H_{0i}J_i$
202	prima eq §7.7.1	$H_gJ$	$H_gJ_i$
203	ultima eq	$\Phi_i^\wedge$	$\Phi_j^\wedge$
207	eq. (7.8)	$E_{pi} = \frac{1}{2}\text{traccia}(\dots)$	$E_{pi} = \text{traccia}(\dots)$
215	riga 9, 11	$\pm 25$ $\pm 90$	$\pm 25^\circ$ $\pm 90^\circ$
223	dopo eq. (8.19)	La cinematica inversa ...	La cinematica diretta ...
230	riga -1	spostare $H = \dot{W} + W^2$ 1 riga sotto	
251	punto b)	$\dots \Delta q_n]$	$\dots \Delta q_n]^T$
255	prima eq.	$\frac{\dots}{\tau_n \dots}$	$\frac{\dots}{\tau_{n-1} \dots}$
262	4° riga dal fondo	$d = P_0 - P_1$	$d = P_1 - P_0$
264	eq. calcolo $\alpha, \beta$	$\{ \dots = -V_1^T V_1 \quad \dots = -V_2^T V_2$	$\{ \dots = V_1^T V_1 \quad \dots = V_2^T V_2$
264	fondo pagina	$\bar{z} = \dots$	$\bar{z} = \frac{(P_2 - P_1) \times (P_0 - P_1)}{\ (P_2 - P_1) \times (P_0 - P_1)\ }$
270	eq.(12.25)	$amg = bck$	$(amg - bck) \cos(\alpha) = 0$ soddisfatta se $\alpha = \pm\pi/2$ per qualsiasi valore di $a, m, b, c, k$ oppure per qualsiasi $\alpha$ se $amg = bck$
271	figura 9.46	$\dot{v}_x, \dot{v}_y$	$v_x, v_y$
282	ultima formula	$G(s) = \frac{\Omega}{C_r} \simeq \frac{s}{\dots}$	$G(s) = \frac{\Omega}{C_r} \simeq \frac{sT_i/k_p}{\dots}$
285		$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = F'(s) = \dots \simeq \left\{ \dots \frac{1}{s} \right.$	$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = F'(s) = \dots \simeq \left\{ \dots \frac{k'_p}{s} \right.$
286		$\omega_2 = \frac{\omega_2}{2\xi} = \frac{\omega_t}{2}$	$\omega_2 = \frac{\omega_t}{2\xi} = \frac{\omega_t}{2}$
288	sopra eq.(10.5)	$R'(s) = k_p(1 + T_d s)$	$R'(s) = k'_p(1 + T_d s)$
288	eq.(10.5)(10.6)	$\tau_\omega = 1/\omega_\omega = 1/\omega_T$ è l'inverso della banda passante dell'anello di velocità	
288	dopo eq.(10.6)	$k_d = k_p T_d$	$k_d = k'_p T_d$
288	eq.(10.7)	$\dots 1 + k_p T_d)$	$\dots 1 + k'_p T_d)$
288	eq.10.8 numeratore	$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{1 + s \frac{T'_d}{k'_p}}{\dots} = \frac{\frac{k'_p}{J} + \frac{T'_d}{k'_p} s}{\dots} =$	$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{1 + s T'_d}{\dots} = \frac{\frac{k'_p}{J} (1 + T'_d s)}{\dots} =$
296	inizio prima eq.	$\frac{1}{J_s}$	$\frac{1}{J_s}$ (s non è un pedice)
296	prima eq.	$J_2$	$J_s$ (s poi si semplifica con quello che compare nel termine $J_1 s$ )
296	fine prima eq.	$\frac{\Omega}{C_0} = \dots = \frac{\dots}{s(J_1 + J) \frac{s^2}{\omega_2^2} + \frac{2\xi_2}{\omega_2} s + 1}$	$\frac{\Omega}{C_0} = \dots = \frac{\dots}{s(J_1 + J) \left[ \frac{s^2}{\omega_2^2} + \frac{2\xi_2}{\omega_2} s + 1 \right]}$
303	riga 7	Il blocco regolatore $R$ , in base all'errore $e_s, \dots$	$\dots R' \dots$

pagina	riferimento	errata	corrigere
306	ultima eq.	$\frac{X_1 - \dots}{\dots}$	$\frac{X_0 - \dots}{\dots}$
309	figura 10.55	$y$	$z$
314	riga 3	$(\omega_b = 0)$	$(\omega_p = 0)$
317	fig.11.4	scambiare i nomi "pezzo 1" e "pezzo 2"	
353	terzultima riga	... del rotore.	... dello statore.
366		$J_2 = \dots = 4.4210^{-4} \text{ kgm}^2$	$J_2 = \dots 4.4910^{-4} \text{ kgm}^2$
383	fig.13.18	scambiare $r$ e $k$	
396	riga 12	PI	PD
415	fig. 14.3	$x_i - 1 \quad z_i - 1$	$x_{i-1} \quad z_{i-1}$
417	1° equazione	$\dots E_{n-1} \dots$ $\prod_{i=0}^{n-1}$	$\dots E_n \dots$ $\prod_{i=0}^n$ $(p = n + 1)$
425	eq.(14.15)	$m_2 g_2 \dot{\beta}_1^2 c$	$-m_2 g_2 \dot{\beta}_1^2 c$
425	dopo eq.(14.15)	$\sin \beta \cos \beta$	$\sin \beta_2 \cos \beta_2$
448	arresto, terzo caso	• categoria 1	• categoria 2 (non ammessa per arresto emergenza)
465	riga -4	la frase <Anche qui le prove ...percorso 1.> va eliminata. Il concetto è affrontato nelle ultime righe del §17.4	
472	riga -10	proiezioni	sezioni
484	tab. A.5	$-\lambda S_\alpha C_\alpha \dot{\beta} + \lambda S_\alpha C_\beta \dot{\gamma}$	$C_\alpha \dot{\beta} + S_\alpha S_\beta \dot{\gamma}$
485	tab. A.7	$\lambda S_\alpha C_\beta$	$\lambda S_\alpha S_\beta$
486	par. A.5	$\phi = \dots$ angolo di precisione	$\phi = \dots$ angolo di precessione
487	elem.1,2 matrice	$\dots + s\phi c\psi$	$\dots - s\phi c\psi$
488	elem.3,1 matrice	$c\phi s\theta c\psi + \dots$	$-c\phi s\theta c\psi + \dots$
495	ultima riga	... soluzione unica $t = -b/a$ .	... soluzione $t = -b/a$ ; l'altra è $\alpha = \pi + 2k\pi$ . Se $a^2 + b^2 = c^2$ le 2 soluzioni coincidono.
499	prima formula	$\text{atan2}(x, y) = \text{atan} \dots$	$\text{atan2}(y, x) = \text{atan} \dots$
503	eq. c.2	$\ x\ $	$\ x\ ^2$
503	eq. c.3	$\ e\ $	$\ e\ ^2$
504	riga 1	$\dots \hat{x}$ che forniscono ...	$\dots x$ che forniscono ...
505	eq.	$\ (D_1 e)\ $	$\ (D_1 e)\ ^2$
505	eq.	$\ (D_2 e)\ $	$\ (D_2 e)\ ^2$
509	prima formula	$f(q_1) + f'(q_1)(q - q_1) = 0$	$f(q_i) + f'(q_i)(q - q_i) = 0$
509	ultima riga	$f'(q_i) = 0$	$f'(q_i) \neq 0$
510	2° eq.	$\dots J(q_i)^{-1}(F(Q)) \dots$	$J(Q_i)^{-1}(F(Q_i)) \dots$
529	F.1.8	PRORAMMA	PROGRAMMA (correggere 2 volte)



\*pag 510\* sostituire figura

Figura D.2 Casi di soluzione non trovata, convergenza e non convergenza dell'algoritmo di N-R.

### **Bibliografia**

Riguardo al metodo matriciale basato su matrici  $4 \times 4$  ci si può anche riferire a

[1] A homogeneous matrix approach to 3D kinematics and dynamics - I. Theory  
Mechanism and Machine Theory, Volume 31, Issue 5, July 1996, Pages 573-587  
Giovanni Legnani, Federico Casolo, Paolo Righettini, Bruno Zappa

[2] A homogeneous matrix approach to 3D kinematics and dynamics - II. Applications to chains of  
rigid bodies and serial manipulators  
Mechanism and Machine Theory, Volume 31, Issue 5, July 1996, Pages 589-605  
Giovanni Legnani, Federico Casolo, Paolo Righettini, Bruno Zappa



# Appendice H

## Ampliamenti e chiarimenti

Questa sezione è dedicata a piccole aggiunte che possono rendere più comprensibile il testo o completarlo.

I riferimenti a pagine, capitoli, figure, equazioni sono relative al libro.

### H.1 Ellissi di Manipolabilità, Isotropia (Pagg.45-48)

Le ellissi di manipolabilità sono degli strumenti sintetici per rappresentare le prestazioni cinetostatiche dei manipolatori nelle diverse zone dell'area di lavoro. Il loro significato verrà spiegato con l'ausilio di esempi.

#### H.1.1 Ellissi di manipolabilità in velocità e in forza

Consideriamo un manipolatore cartesiano  $xy$ ; ciascuno dei due assi avrà una velocità massima ammissibile  $\pm\dot{q}_{x,max}$  e  $\pm\dot{q}_{y,max}$ . Le componenti della velocità del dispositivo d'estremità lungo gli assi  $x, y$  avranno quindi modulo minore o uguale a quella del motore corrispondente. Tuttavia in direzioni diagonali esso potrà raggiungere velocità più elevate ma mai superiori a  $V_{max} = \sqrt{\dot{q}_{x,max}^2 + \dot{q}_{y,max}^2}$ . Il luogo descritto dai vettori velocità massima nelle varie direzioni è perciò un rettangolo. Se i due motori hanno pari prestazioni il rettangolo diventa un quadrato. Il risultato esposto non cambia all'interno dell'area di lavoro.

Un discorso analogo può essere fatto qualora interessi studiare le forze massime esercitabili nelle diverse direzioni.

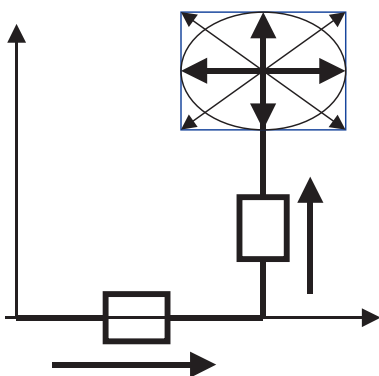


Figura H.1: Manipolatore cartesiano: velocità (o forze) massime ammissibili in funzione delle direzioni.

Se si considera un manipolatore polare la velocità “radiale” massima è limitata da quella del motore lineare  $V_{r,max} = \dot{\rho}_{max}$ , mentre quella “tangenziale” è limitata dal prodotto della velocità angolare massima del motore rotativo per la distanza del dispositivo d'estremità dalla torretta  $V_{t,max} = \rho\omega_{max}$ . Inoltre in direzioni diverse le due velocità si possono sommare e quindi, per particolari direzioni, la velocità può raggiungere il valore  $V_{max} = \sqrt{(\dot{\rho}_{max})^2 + (\rho\omega_{max})^2}$ . Il luogo dei vettori velocità massime è ancora un rettangolo con lati paralleli alle direzioni radiale e tangenziale. Dato che il valore della distanza  $\rho$  varia



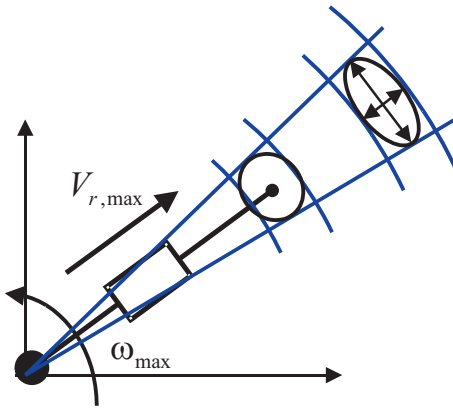


Figura H.2: Manipolatore polare: velocità massima ammissibile in funzione delle direzione e della configurazione.

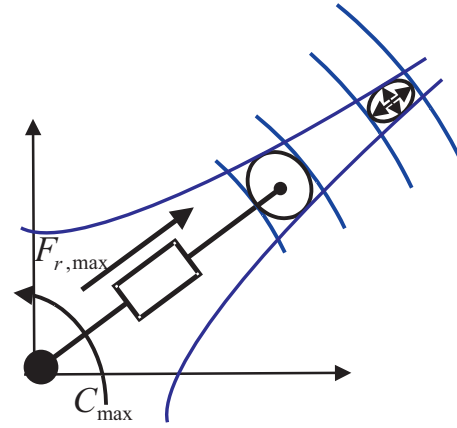


Figura H.3: Forze massime esercitabili da un manipolatore polare in funzione della direzione e della configurazione.

nell'area di lavoro, si deduce che la velocità massima tangenziale aumenta con la distanza e il rettangolo delle velocità si deforma di conseguenza.

Analogamente per le forze possiamo dire che in direzione radiale il manipolatore potrà esercitare una forza massima costante limitata dalle prestazioni del motore lineare, mentre in direzione tangenziale il modulo della forza massima esercitabile sarà inversamente proporzionale alla distanza  $F_{t,max} = C_{max}/\rho$  essendo limitata dalla coppia massima del motore rotativo. Il luogo delle forze massime esercitabili è un rettangolo in cui il lato "tangenziale" decresce con la distanza.

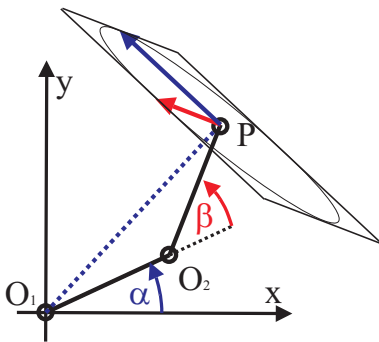


Figura H.4: Composizione delle velocità in un manipolatore SCARA.

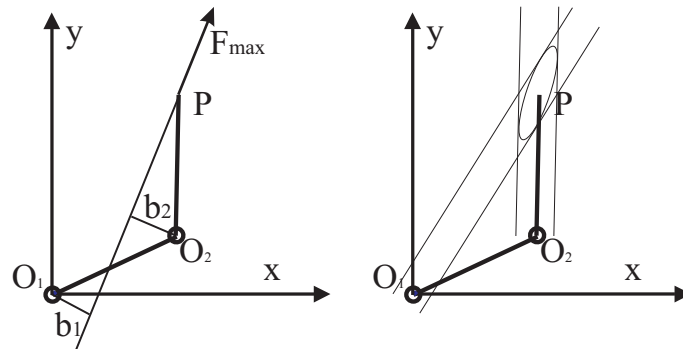


Figura H.5: Determinazione delle forze massime esercitabili da un manipolatore SCARA.

Nel caso di un manipolatore SCARA la componente di velocità fornita da ciascun motore è proporzionale alla distanza  $P - O_i$  tra il dispositivo di estremità  $P$  e l'asse del motore  $O_i$  ed è limitata dalla velocità massima di quest'ultimo. La componente di velocità fornita da ogni motore è ortogonale al vettore  $P - O_i$ . In generale, le due componenti di velocità non sono tra loro ortogonali. Il luogo delle velocità massime è quindi un parallelogramma i cui lati sono proporzionali alle quantità  $V_{i,max} = |P - O_i|\omega_{i,max}$ .

La forza massima esercitabile in una direzione dipende dai bracci  $b_i$  della forza rispetto agli assi dei motori oltre che dalla loro coppia massima  $C_{i,max}$ . Nessun motore deve essere sovraccaricato per cui:  $F_{max} = \min(C_{1,max}/b_1, C_{2,max}/b_2)$ . Ovviamente il braccio dipende sia dalla posizione della pinza, sia dalla direzione della forza. Il parallelogramma delle forze massime generabili in funzione della posizione si ottiene dall'intersezione di due "corridoi" di semi-larghezza  $f_i = C_{i,max}/||P - O_i||$  paralleli alla direzione  $P - O_i$ .

Nel caso di manipolatori a diversi gradi di libertà, la determinazione delle velocità massime raggiungibili e delle forze massime generabili può essere molto complesso, ma segue i criteri generali qui descritti.

Nel caso di moto  $xyz$  (3D), i parallelogrammi sono sostituiti da parallelepipedi.

Le ellissi di manipolabilità in velocità ed in forza danno un metodo standard, applicabile in modo automatico anche a manipolatori complicati con diversi gradi di libertà, per indicare in quali direzioni è possibile avere velocità elevate o esercitare forze più o meno considerevoli. Le ellissi di manipolabilità sono delle ellissi che approssimano il luogo dei punti di velocità o forza massime. Il disegno di una famiglia di ellissi relative a diverse posizioni del manipolatore evidenzia il suo diverso comportamento nell'area di lavoro. Nel caso di manipolatori piani si considera l'ellisse inscritta nei parallelogrammi descritti e tangenti ai lati nelle loro mezzerie.

Nel caso di manipolatori che si muovono nelle tre direzioni xyz, le ellissi sono sostituite da ellissoidi. Queste ellissi (o gli ellissoidi) sono determinabili anche nel caso di manipolatori a più gradi di libertà. La determinazione delle ellissi può essere effettuata sulla base di procedure standard che fanno uso degli autovettori ed ai valori singolari della matrice jacobiana o di matrici derivate da essa.

Quando i diversi motori di un manipolatore sono tutti dello stesso tipo (rotativo o lineare) spesso per semplicità si assume che abbiano tutti le stesse prestazioni massime sia in termini di velocità che di coppia (o forza) massima. Il calcolo delle ellissi si semplifica dato che spesso è sufficiente calcolarne la forma e non la dimensione. In questo caso la scelta delle unità di misura non influenza la forma dell'ellisse.

Nel caso in cui il manipolatore abbia attuatori dei due tipi, allora è indispensabile tenere conto delle reali prestazioni di ciascuno altrimenti si ottengono ellissi la cui eccentricità dipende dalle unità di misura impiegate e non hanno quindi significato fisico.

Le ellissi di velocità e di forza non pesate sono associate alle seguenti equazioni

$$1 = \sum \dot{q}_i^2 = \dot{Q}^T \dot{Q} \quad \Rightarrow \quad \dot{S}^T (J^{-t} J^{-1}) \dot{S} = 1$$

$$1 = \sum f_{qi}^2 = F_q^T F_q \quad \Rightarrow \quad F_s^T (J J^t) F_s = 1$$

mentre quelle pesate sono associate alle seguenti equazioni

$$1 = \sum \left( \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{i,\max}} \right)^2 = \dot{Q}^T D_v^T D_v \dot{Q} \quad \Rightarrow \quad \dot{S}^T (J^{-t} D_v^T D_v J^{-1}) \dot{S} = 1$$

$$1 = \sum \left( \frac{f_{qi}}{f_{qi,\max}} \right)^2 = F_q^T D_f^T D_f F_q \quad \Rightarrow \quad F_s^T (J D_f^T D_f J^t) F_s = 1$$

con

$$D_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{q}_{1,\max}} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\dot{q}_{2,\max}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad D_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_{q1,\max}} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{f_{q2,\max}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

**Attenzione:** l'ellisse di forza e quella di velocità sono tra loro ortogonali solo nel caso di ellissi non pesate oppure nel caso di ellissi pesate quando le matrici dei pesi sono scelte in modo opportuno per cui  $D_f = k D_v^{-1}$  ove  $k \neq 0$  è uno scalare di valore arbitrario.

### H.1.2 Ellissi d'inerzia (di massa)

Le ellissi di inerzia (o di massa) danno informazioni sulla capacità di accelerazione nelle varie direzioni dell'area di lavoro quando è sottoposto a forze esterne applicate sul centro utensile. Queste ellissi sono particolarmente significative nei casi in cui il manipolatore scambia forza con l'ambiente esterno; ad esempio mentre movimentata un utensile che esegue lavorazioni meccaniche. In congiunzione con le ellissi di elasticità (o di rigidezza), le ellissi di massa danno informazioni sulla possibilità di insorgenza di vibrazioni.

Nel §2.8 viene mostrato come le forze motrici  $F_q$  necessarie a produrre un'accelerazione dei giunti  $\ddot{Q}$  valgono

$$F_q \simeq \overline{M} \ddot{Q}$$

ove è stato usato il simbolo "circa uguale" perché vengono qui trascurati i termini quadratici nelle velocità, cioè il prodotto  $\dot{J} \dot{Q}$ , che è trascurabile a basse velocità. Inoltre si considera il caso con forze esterne nulle. Consideriamo ora il caso che i motori siano spenti in folle (coppia nulla) e ci chiediamo quali forze applicate all'estremità dal manipolatore avrebbero lo stesso effetto delle coppie motrici appena calcolate. Dalla cinetostatica sappiamo trasferire forze ad accelerazioni dai giunti al dispositivo d'estremità con le

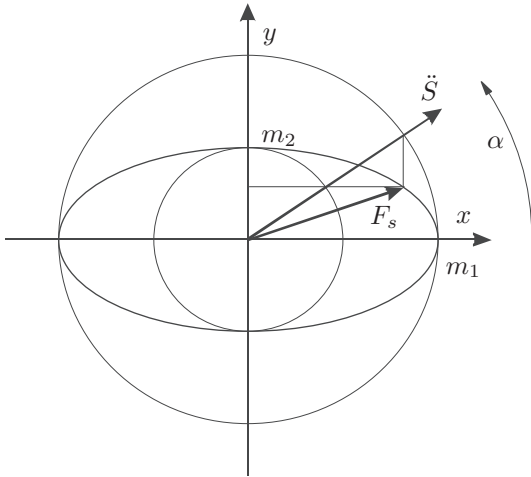


Figura H.6: Costruzione grafica ellisse di massa (inerzia).

### Ellissi d'inerzia: rappresentazione grafica

Per visualizzare la forza  $F_s$  necessaria a produrre una certa accelerazione  $\ddot{S}$  si può applicare la costruzione seguente.

Si considera inizialmente un'accelerazione unitaria diretta come  $\ddot{S} = [a_1 \ a_2]^T$  e la si scompone nelle direzioni dei due diametri. La componente parallela a  $u_1$  va moltiplicata per  $m_1$ , quella parallela a  $u_2$  va moltiplicata per  $m_2$ . Le due componenti vanno quindi moltiplicate per il modulo dell'accelerazione

$$F_s = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = |\ddot{S}| \begin{bmatrix} m_1 \cos(\alpha) \\ m_2 \sin(\alpha) \end{bmatrix} =$$

relazioni  $\ddot{S} \simeq J\ddot{Q}$  e  $F_q = J^T F_s$  (il segno meno non compare perchè le forze sono quelle equivalenti e non quelle equilibranti). Si ottiene quindi

$$F_s \simeq (J^{-t} \overline{\mathcal{M}} J^{-1}) \ddot{S}$$

Questa relazione permette di calcolare quale forza deve essere applicata al dispositivo d'estremità del manipolatore per generare un'accelerazione desiderata. Possiamo considerare questa relazione come una generalizzazione della legge di Newton  $\vec{f} = m\vec{a}$ .

Alla matrice  $\overline{\mathcal{M}}_s = (J^{-t} \overline{\mathcal{M}} J^{-1})$  può essere associata una ellisse rappresentante l'inerzia (massa) equivalente del manipolatore in una determinata direzione. Infatti consideriamo un'accelerazione  $\ddot{S}$  di ampiezza unitaria e di direzione generica e calcoliamo la forza necessaria a produrla; se facciamo ruotare in tutte le direzioni questo vettore, il vettore della forza descriverà un'ellisse. Questo può essere dimostrato osservando che la matrice  $\overline{\mathcal{M}}_s$  è simmetrica definita positiva.

Si osserva che forza ed accelerazione sono tra loro parallele solo se la forza è diretta lungo uno degli assi dell'ellisse.

Le direzioni degli assi dell'ellisse sono definite dagli autovettori di  $\overline{\mathcal{M}}_s$  e i raggi (semidiametri) dai corrispondenti autovalori.

### Ellissi di rigidità ed elasticità

L'ellisse di cedevolezza o quella di rigidità permettono di indicare lo spostamento della pinza del manipolatore dovuto alla applicazione di una forza quando i giunti sono cedevoli.

L'ellisse associata all'equazione  $dS = kJJ^T F_s$  definita al capitolo 2 è di cedevolezza (inversa di quelle di rigidità). L'ellisse di rigidità sarebbe quindi associata a  $F_s = \frac{1}{k} (JJ^T)^{-1} dS$ .

Si osserva che forza e spostamento sono tra loro paralleli solo se la forza è diretta lungo uno degli assi dell'ellisse. Per una visualizzazione grafica di questo fenomeno si consideri per analogia il caso di ellisse di inerzia (massa).

Consideriamo l'ellisse associata alla matrice  $JJ^T$ . Il diametro in una direzione rappresenta la cedevolezza equivalente in quella direzione ed è quindi proporzionale allo spostamento dovuto all'applicazione di una forza in quella direzione.

Le direzioni degli assi dell'ellisse di cedevolezza (elasticità) sono definite dagli autovettori  $u_i$  di  $JK_q J^T$  (o  $kJJ^T$ ) e i raggi (semidiametri) dai corrispondenti autovalori  $\lambda_i$ . Per la rigidità occorre fare riferimento alla matrice inversa i cui autovettori sono i medesimi e i cui autovalori valgono  $1/\lambda_i$ .

### H.1.3 Forza, Velocità massima in una direzione.

La forza massima esercitabile in una direzione si può facilmente determinare esprimendo la forza applicata all'end-effector come prodotto del modulo per un versore  $F_s = f u_s$ , l'ellisse di forza è così definita come

$$f u^T A u f = 1 \quad A = J D_f^T D_f J^T$$

da cui

$$f = \frac{1}{\sqrt{u^T A u}}$$

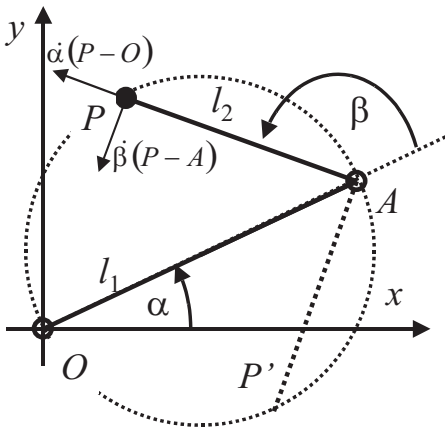
in maniera analoga è calcolabile la velocità massima.

### H.1.4 Nota

Si osservi come nei diversi casi considerati le ellissi siano state definite in maniera differente. In alcuni casi (velocità, forze) si è fatto riferimento a equazioni del tipo  $v^T A^T A v = 1$  e le direzioni degli assi dell'ellisse corrispondono agli autovettori della matrice  $A^T A$  mentre le lunghezze  $r_i$  dei semidiametri sono legate all'inverso della radice quadrata dei corrispondenti autovalori  $r_i = \sqrt{1/\lambda_i}$  (inverso dei valori singolari di  $A$ ).

In altri casi (massa, forza) la relazione di riferimento è del tipo  $v = B u$  e le direzioni degli assi dell'ellisse corrispondono agli autovettori della matrice  $B$  mentre le lunghezze  $r_i$  dei semidiametri coincidono con il valore dei corrispondenti autovalori  $r_i = \lambda_i$ .

### H.1.5 Esempi applicativi



Nel caso di motori identici o comunque nel caso non pesato, il robot SCARA (§2.9, pag. 51) può essere in configurazione isotropa solo se le componenti delle velocità generate dai due motori sono di egual modulo  $|P - O| = |P - A|$  e tra loro ortogonali  $\overrightarrow{P - O} \perp \overrightarrow{P - A}$ . Ciò implica che devono valere le due seguenti condizioni:  $\beta = \pm 135^\circ (3/4\pi)$  e  $l_1 = \sqrt{2}l_2$ ; il valore di  $\alpha$  è indifferente. In questo caso le ellissi di manipolabilità in forza e velocità diventano dei cerchi.

Figura H.7: Robot SCARA in configurazione isotropa (forza e velocità non pesate).

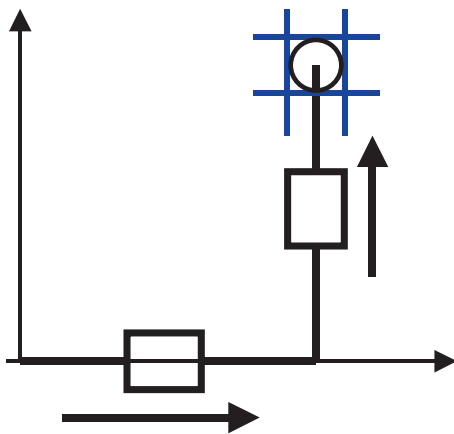


Figura H.8: Nel caso di motori identici o comunque nel caso non pesato, il robot cartesiano è isotropo in ogni punto dello spazio di lavoro.

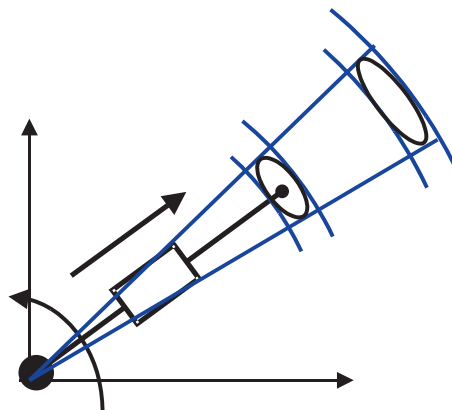


Figura H.9: Le ellissi di velocità del robot polare (§2.11, pag.58) si allungano in direzione tangenziale via via che il centro utensile si allontana dall'asse di rotazione. Corrispondentemente le ellissi di forza (non mostrate in figura) si ridurranno. L'isotropia si potrà avere solo per una determinata distanza dall'asse di rotazione.

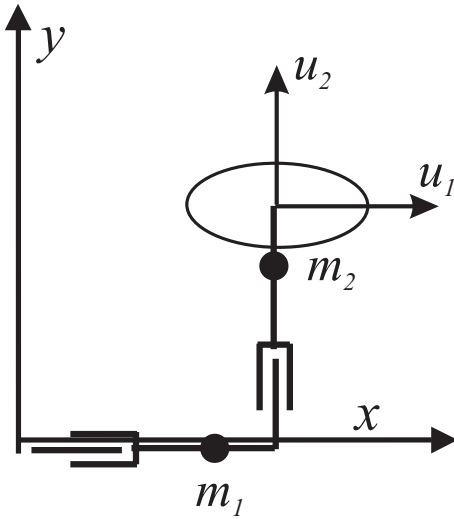


Figura H.10: Robot cartesiano: ellissi di massa o di elasticità.

**Ellissi d'inerzia (massa): robot cartesiano**

Le ellissi di massa di un robot cartesiano sono estremamente semplici da calcolare. Con riferimento all'esempio di figura, come è intuitivo, l'ellisse è parallela agli assi di scorrimento, la massa equivalente (autovalori) in direzione  $x$  vale  $m_1 + m_2$  mentre quella in direzione  $y$  vale  $m_2$ .

**Ellissi di elasticità: robot cartesiano**

Le ellissi di elasticità hanno diametri paralleli agli assi e lunghezza proporzionale alla elasticità dei giunti corrispondenti. Nel caso di assi tra loro identici il manipolatore è isotropo. Ovviamente, come per tutti i manipolatori, questo vale solo se si considera solo l'elasticità dei giunti e non quella flessionale degli elementi che compongono i link.

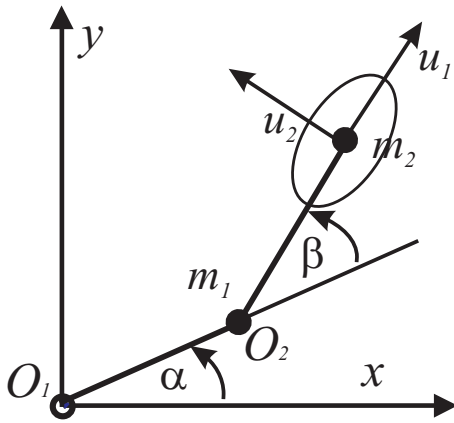


Figura H.11: Ellisse di massa di un robot SCARA nel caso semplificato in cui  $J_{g1} = J_{g2} = 0$ ,  $m = 0$ ,  $g_1 = l_1, g_2 = l_2$  (confronta §2.9.5 pag.55).

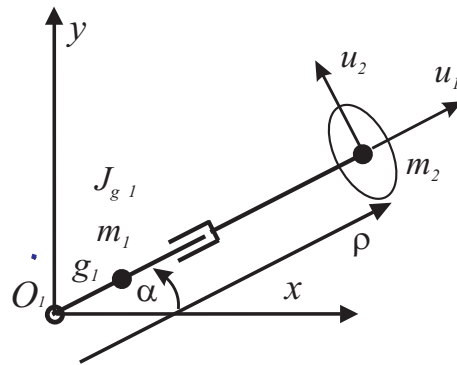


Figura H.12: Ellisse di massa di un robot polare nel caso semplificato in cui la massa del secondo link sia concentrata all'estremo  $h = 0$  (confronta §2.11.3 pag.59).

**Robot SCARA**

Immaginiamo per semplicità che le uniche masse significative possano essere considerate puntiformi e localizzate al termine dei link:  $m_1$  al termine del link 1 e  $m_2$  al termine del link2. Le coordinate necessarie allo studio dinamico sarebbero

$$S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\alpha + \beta) \\ l_1 \sin(\alpha) + l_2 \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \quad S_e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x_{g1} \\ y_{g1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\alpha + \beta) \\ l_1 \sin(\alpha) + l_2 \sin(\alpha + \beta) \\ l_1 \cos(\alpha) \\ l_1 \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$M = \text{diag}(m_2, m_2, m_1, m_1)$$

In questo caso le direzioni degli assi dell'ellisse (autovettori della matrice di massa) ed i relativi semidiametri (autovalori) risultano

$$u_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) \\ \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = m_2 + \frac{m_1}{\sin^2(\beta)} \quad \lambda_2 = m_2$$

L'asse  $u_1$  è parallelo al secondo link. Per spostamenti in direzione  $u_2$  conta solo la massa  $m_2$ , mentre in direzione  $u_1$  occorre sommare una quota derivante dalla massa  $m_1$ . Qualora i baricentri non siano nelle posizioni indicate o i momenti d'inerzia non siano nulli le direzioni (autovettori) e le masse equivalenti (autovalori) sarebbero differenti.

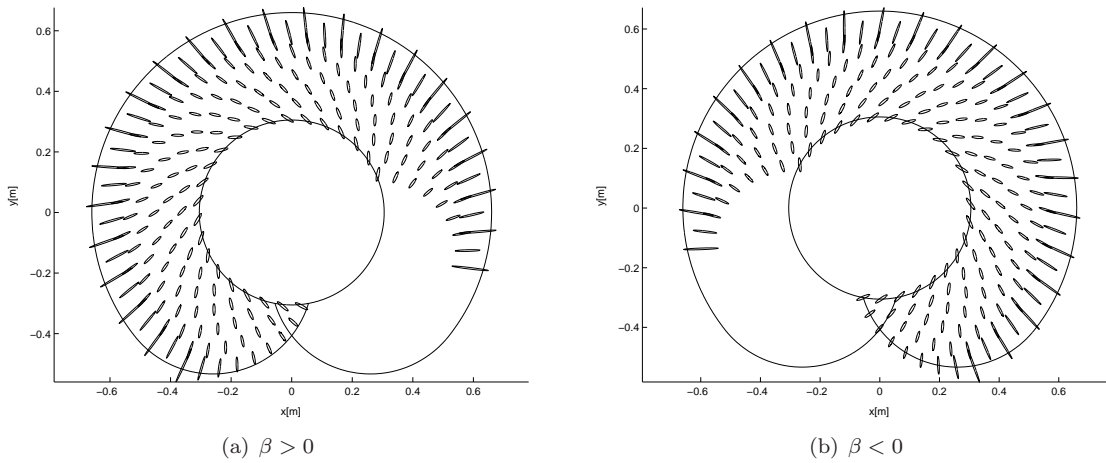


Figura H.13: Le ellissi di inerzia del robot ICOMATIC SCARA03.

### Robot polare

Immaginiamo per semplicità che le uniche masse significative possano essere rappresentate da due masse puntiformi:  $m_1$  sul link 1,  $m_2$  al termine del link2,  $m$  la massa trasportata. Siano inoltre  $J_{g1}, J_{g2}, eJ$  i momenti d'inerzia baricentrali dei due link e della massa trasportata. Le coordinate necessarie allo studio dinamico sarebbero

$$S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\alpha) \\ \rho \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad S_e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x_{g1} \\ y_{g1} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\alpha) \\ \rho \sin(\alpha) \\ g_1 \cos(\alpha) \\ g_1 \sin(\alpha) \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$M = \text{diag}(m + m_2, m + m_2, m_1, m_1, J_{g1} + J_{g2} + J)$$

In questo caso le direzioni degli assi dell'ellisse (autovettori della matrice di massa) ed i relativi semidiametri (autovalori) risultano

$$u_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = m+m_2 \quad \lambda_2 = m+m_2 + m_1 \frac{g_1^2}{\rho^2} + \frac{J_{g1} + J_{g2} + J}{\rho^2}$$

L'asse  $u_1$  è parallelo ai link,  $u_2$  ortogonale ad essi. Per spostamenti in direzione  $u_2$  conta solo la massa  $m + m_2$ , mentre in direzione  $u_1$  occorre sommare una quota derivante dalla massa  $m_1$  e dai momenti d'inerzia.

A titolo d'esempio si riportano le ellissi d'inerzia del robot Icomatic SCARA03 calcolate per le due configurazioni (a sinistra  $q_2 > 0$ , a destra  $q_2 < 0$ ). Esse sono tracciate solo per le configurazioni realmente raggiungibili tenendo conto dei fine corsa reali. Nel caso specifico di questo particolare modello di manipolatore (Icomatic SCARA03), le proporzioni e l'orientamento delle ellissi di rigidità sono molto simili a quelle delle ellissi di inerzia; tuttavia questo non avviene in generale per altri modelli o altri manipolatori.

## H.2 Biella equivalente

Il metodo per l'analisi dinamica esposto nel capitolo 2 è molto adatto per lo studio di sistemi piani e per qualche sistema 3D particolarmente semplice. Tuttavia esso non si applica facilmente a sistemi 3D in cui si possono avere rotazioni attorno ad assi di orientamento variabile nel tempo e che determinano quindi la nascita di effetti dinamici giroscopi.

Il problema può essere risolto facilmente sostituendo masse distribuite (proprietà dinamiche descritte da tensore (o pseudo-tensore) d'inerzia) con un gruppo di masse puntiformi che nel loro insieme abbiano la stessa proprietà di massa del corpo distribuito.

Un caso particolarmente semplice è quello di un corpo (ad esempio un'asta, figura H.14(a)) allungato che ha un momento d'inerzia longitudinale  $J_z$  trascurabile e due momenti d'inerzia trasversali tra loro

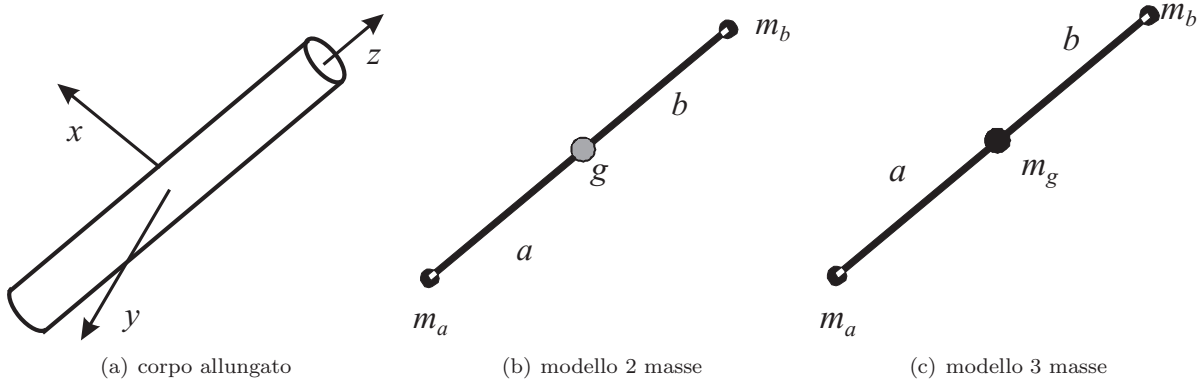


Figura H.14: Approssimazione della dinamica di un corpo allungato con un'asta e 2 o 3 masse puntiformi.

identici e molto più grossi del momento longitudinale

$$J_x = J_y \gg J_z$$

Consideriamo quindi un'asta di massa  $m$ , momento d'inerzia baricentrico trasversale  $J_g$ , lunghezza  $\ell = a + b$  il cui baricentro disti delle quantità  $a$  e  $b$  dagli estremi (figura H.14(b)). In questo caso si può immaginare di sostituire la massa distribuita con due masse  $m_a$  e  $m_b$  poste alle estremità in modo tale che si conservi la massa e la posizione del baricentro. Deve perciò essere

$$\begin{cases} m = m_a + m_b \\ m_a a = m_b b \end{cases} \quad \text{perci\`o} \quad \begin{cases} m_a = \frac{b}{a+b} m \\ m_b = \frac{a}{a+b} m \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} J'_g = a^2 m_a + b^2 m_b \neq J_g \\ J'_z = 0 \end{cases}$$

Tuttavia cos\`i facendo (a meno di casi fortunati) non si conserva il valore del momento d'inerzia trasversale. Infatti, ad esempio, considerando un'asta uniforme il suo momento d'inerzia reale  $J_g$  e quello del modello approssimato  $J'_g$  valgono

$$\begin{aligned} a = b = \ell/2 & & J'_g = \frac{1}{4} m \ell^2 & & J_g = \frac{1}{12} m \ell^2 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{m}{\ell} z^2 dz \\ m_a = m_b = m/2 & & & & \end{aligned}$$

Un modello pi\`u preciso pu\`o essere sviluppato con tre masse, di cui due poste agli estremi ed una  $m_g$  posta nel baricentro (figura H.14(c)); in questo caso anche il valore del momento d'inerzia pu\`o essere mantenuto esatto. Si ottiene

$$\begin{cases} m = m_a + m_b + m_g \\ m_a a = m_b b \\ J_g = m_a a^2 + m_b b^2 \end{cases} \quad \text{perci\`o} \quad \begin{cases} m_a = \frac{J_g}{a(a+b)} \\ m_g = m - \frac{J_g}{ab} \\ m_b = \frac{J_g}{b(a+b)} \end{cases}$$

Perci\`o nel caso di barra omogenea si ottiene

$$m_a = \frac{m}{6} \quad m_g = \frac{2}{3} m \quad m_b = \frac{m}{6}$$

### H.3 Robot 3R (capitolo 2.17)

L'equazione della cinematica inversa necessaria per calcolare  $\alpha$  ammette una singolarit\`a quando i due argomenti della funzione atan2 sono contemporaneamente nulli ( $-xv + yu = xu + yv = 0 \Rightarrow u^2 + v^2 = 0$ )

$$\alpha = \text{atan2}(-xv + yu, xu + yv)$$

tuttavia questa condizione pu\`o capitare solo per  $\cos(\beta) = \pm 1$  se contemporaneamente  $\cos(\gamma) = \pm 1$  e solo per particolari valori delle lunghezze per cui capita  $l_1 \pm l_2 \pm l_3 = 0$ . Quindi questo caso rientra nelle gi\`a

citare configurazioni singolari.

Le equazioni per la cinematica inversa che permettono il calcolo di  $\beta$  e  $\gamma$  si ottengono con il seguente procedimento.

L'eq.(2.45) rappresenta il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= (l_1 + (l_2 + l_3 \cos(\gamma)) \cos(\beta))^2 + (l_3 \sin(\gamma))^2 \\ z &= (l_2 + l_3 \cos(\gamma)) \sin(\beta) \end{cases} \quad (\text{H.1})$$

Aggiungendo  $z^2$  alla prima si ottiene

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1(l_2 + l_3 \cos(\gamma)) \cos(\beta) + 2l_2l_3 \cos(\gamma) \\ \frac{z}{\sin(\beta)} - l_2 &= l_3 \cos(\gamma) \end{cases} \quad (\text{H.2})$$

e per  $\sin(\beta) \neq 0$  si ottiene

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2 - l_1^2 + l_2^2 - l_3^2) \sin(\beta) - 2l_1z \cos(\beta) - 2l_2z = 0 \\ \gamma = \pm \arccos\left(\frac{z}{l_3 \sin(\beta)} - \frac{l_2}{l_3}\right) \end{cases} \quad (\text{H.3})$$

e quindi si giunge al nuovo sistema che sostituisce eq.(2.47)

$$\begin{cases} t_b^2(l_1 - l_2)z + t_b(x^2 + y^2 + z^2 - l_1^2 + l_2^2 - l_3^2) - (l_1 + l_2)z = 0 \\ \gamma = \pm \arccos\left(\frac{z}{l_3 \sin(\beta)} - \frac{l_2}{l_3}\right) \end{cases} \quad (\text{H.4})$$

dalla prima equazione di secondo grado si determina  $t_b$ . In generale si avranno due soluzioni (eventualmente coincidenti). Detta equazione può degenerare in una di primo grado se  $l_1 = l_2$  o se  $z = 0$ . Per ognuna delle soluzioni trovate, l'angolo  $\beta$  si determina come  $\beta = 2 \operatorname{atan}(t_b)$ .

Noto  $\beta$ , se  $\sin(\beta) \neq 0$ , è immediato ricavare  $\gamma$ .

Se  $\sin(\beta) = 0$  allora anche  $z = 0$ , ed il manipolatore si comporta come un robot SCARA in cui il primo link è lungo  $l_1 + l_2$  ed il secondo è lungo  $l_3$ . Il robot SCARA è trattato al §2.9.2.

## H.4 coordinate angolari (capitolo 3.3)

La difficoltà nello scegliere un gruppo di tre variabili angolari che descriva “bene” la posizione angolare di un corpo deriva dal principio di *non integrabilità della velocità angolare*. Cioè si dimostra che l'integrale della velocità angolare non ha particolare significato fisico. Come conseguenza di ciò non è possibile definire tre coordinate angolari la cui derivata rispetto al tempo coincida con il vettore velocità angolare. Questo concetto è illustrato dalla figura seguente ove si confrontano due situazioni. Nella prima un dado è inizialmente ruotato di  $90^\circ$  intorno a  $Z$ , poi di  $90^\circ$  intorno a  $Y$ . Nella seconda situazione le rotazioni avvengono in ordine opposto. Si osservi come l'orientamento finale del dado sia diverso nei due casi mentre l'integrale della velocità angolare è identico.

## H.5 Stanford Arm (Pagg.135-137)

Lo Stanford Arm è descritto dai seguenti parametri di Denavit e Hartenberg:

n.link	giunto	$\theta$	$d$	$a$	$\varphi$	
1	R	$q_1$	0	0	$-\pi/2$	rotazione della torretta attorno all'asse $z_0$
2	R	$q_2$	$d_2$	0	$\pi/2$	elevazione del braccio attorno all'asse $z_1$
3	P	0	$q_3$	0	0	allungamento del braccio lungo $z_2$
4	R	$q_4$	0	0	$-\pi/2$	prima rotazione giunto sferico attorno a $z_3 = z_2$
5	R	$q_5$	0	0	$\pi/2$	flessione polso sferico attorno a $z_4$
6	R	$q_6$	0	0	0	terza rotazione giunto sferico attorno a $z_5$



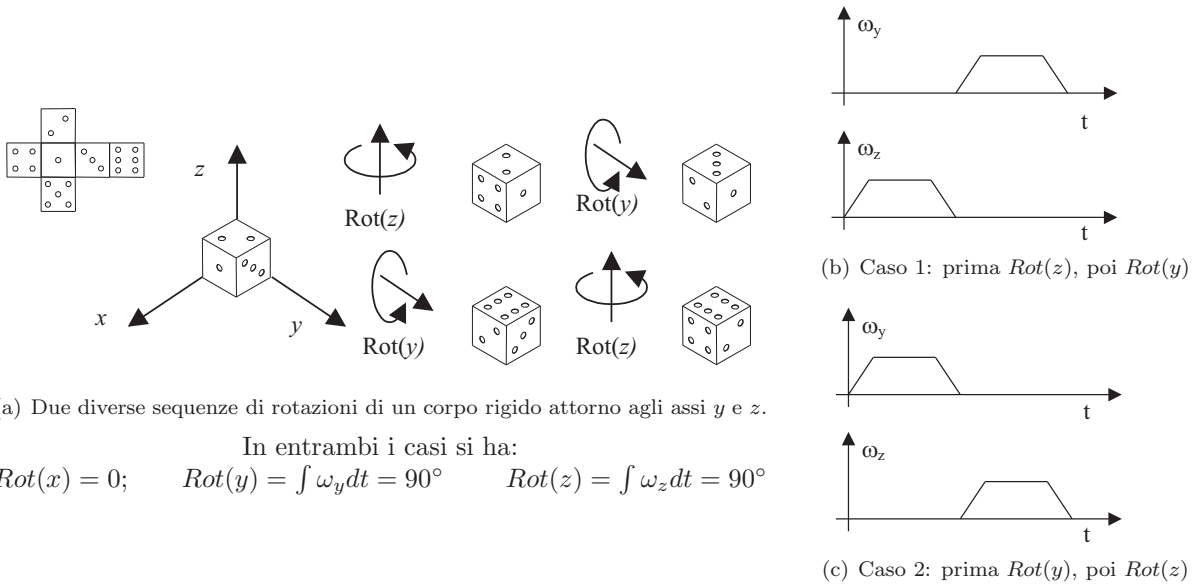


Figura H.15: Effetto di due differenti sequenze di rotazione di  $90^\circ$ .

### H.6 §6.2.3 Sistemi di riferimento (Pag. 136-138)

La figura H.16 illustra il posizionamento delle terne tecniche previste dalla norma UNI EN ISO 9787. Sono definite:

- (0) a terna del laboratorio (non completamente definita) numerata con 0 ed asse  $z$  verticale;
- (1) la terna di base numerata con 1, asse  $z$  diretta verso il manipolatore, asse  $x$  verso il centro dello spazio di lavoro (CW = Center of Workspace, stà nel piano  $x_0z_0$ );
- (m) dell'interfaccia meccanica (con  $m = n + 1$ ,  $n$ =numero dei gradi di libertà), quando i motori si trovano circa a metà corsa i piani  $xz$  della terna (0) e (m) coincidono o sono paralleli, asse  $z$  uscente dall'interfaccia;
- (t) dell'utensile (tool), non completamente definito, generalmente con asse  $y$  in direzione del movimento delle dita (se presenti), ed asse  $z$  uscente dalla pinza (utensile).

Il centro dello spazio di lavoro è il punto raggiunto dal punto di riferimento del polso quando gli assi principali sono (circa) a metà corsa.

### H.7 Elbow Arm (Pagg.149-153)

L'Elbow Arm è descritto dai seguenti parametri di Denavit e Hartenberg:

n.link	giunto	$\theta$	$d$	$a$	$\varphi$	
1	R	$q_1$	0	0	$\pi/2$	rotazione della torretta attorno all'asse $z_0$
2	R	$q_2$	0	$a_2$	0	elevazione del braccio attorno all'asse $z_1$
3	R	$q_3$	0	$a_3$	0	elevazione dell' avambraccio attorno $z_2$
4	R	$q_4$	0	$a_4$	$-\pi/2$	prima rotazione giunto sferico attorno a $z_3$
5	R	$q_5$	0	0	$\pi/2$	flessione polso sferico attorno a $z_4$
6	R	$q_6$	0	0	0	terza rotazione giunto sferico attorno a $z_5$

Enumerazione delle 8 soluzioni dell'Elbow Arm													
	braccio	TCP	gomito	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$	$\vartheta_3$	$\vartheta_{234}$	$\vartheta_4$	$\vartheta_5$	$\vartheta_6$
1	Avanti	Fuori	giù	0	0	1	$\vartheta_a$	$\vartheta_{b1}$	$\vartheta_{c1}$	$\vartheta_g$	$\vartheta_{d1}$	$\vartheta_e$	$\vartheta_f$
2	Avanti	Fuori	su	0	0	-1	$\vartheta_a$	$\vartheta_{b2}$	$-\vartheta_{c1}$	$\vartheta_g$	$\vartheta_{d2}$	$\vartheta_e$	$\vartheta_f$
3	Avanti	Dentro	giù	0	1	1	$\vartheta_a$	$\vartheta_{b3}$	$\vartheta_{c2}$	$\vartheta_g \pm \pi$	$\vartheta_{d3}$	$-\vartheta_e$	$\vartheta_f - \pi$
4	Avanti	Dentro	su	0	1	-1	$\vartheta_a$	$\vartheta_{b4}$	$-\vartheta_{c2}$	$\vartheta_g \pm \pi$	$\vartheta_{d4}$	$-\vartheta_e$	$\vartheta_f - \pi$
5	Dietro	Fuori	su	1	0	1	$\pi - \vartheta_a$	$\pi - \vartheta_{b2}$	$\vartheta_{c1}$	$\vartheta_g$	$-\vartheta_{d2}$	$\pi - \vartheta_e$	$\vartheta_f - \pi$
6	Dietro	Fuori	giù	1	0	-1	$\pi - \vartheta_a$	$\pi - \vartheta_{b1}$	$-\vartheta_{c1}$	$\vartheta_g$	$-\vartheta_{d1}$	$\pi - \vartheta_e$	$\vartheta_f - \pi$
7	Dietro	Dentro	su	1	1	1	$\pi - \vartheta_a$	$\pi - \vartheta_{b4}$	$\vartheta_{c2}$	$\vartheta_g \pm \pi$	$-\vartheta_{d4}$	$-\pi + \vartheta_e$	$\vartheta_f$
8	Dietro	Dentro	giù	1	1	-1	$\pi - \vartheta_a$	$\pi - \vartheta_{b3}$	$-\vartheta_{c2}$	$\vartheta_g \pm \pi$	$-\vartheta_{d3}$	$-\pi + \vartheta_e$	$\vartheta_f$

I valori di  $k_1, k_2, k_3$  sono quelli utilizzati nella selezione delle soluzioni:  
 $\vartheta_1 = \text{atan2}(T_y, T_x) + k_1\pi$ ,  $k_1 = 0, 1$   $\vartheta_{234} = \text{atan2}(Z_z, c_1Z_x + s_1Z_y) + k_2\pi$ ,  $k_2 = 0, 1$   $\vartheta_3 = k_3 \text{acos}(\cdot)$ ,  $k_3 = -1, 1$

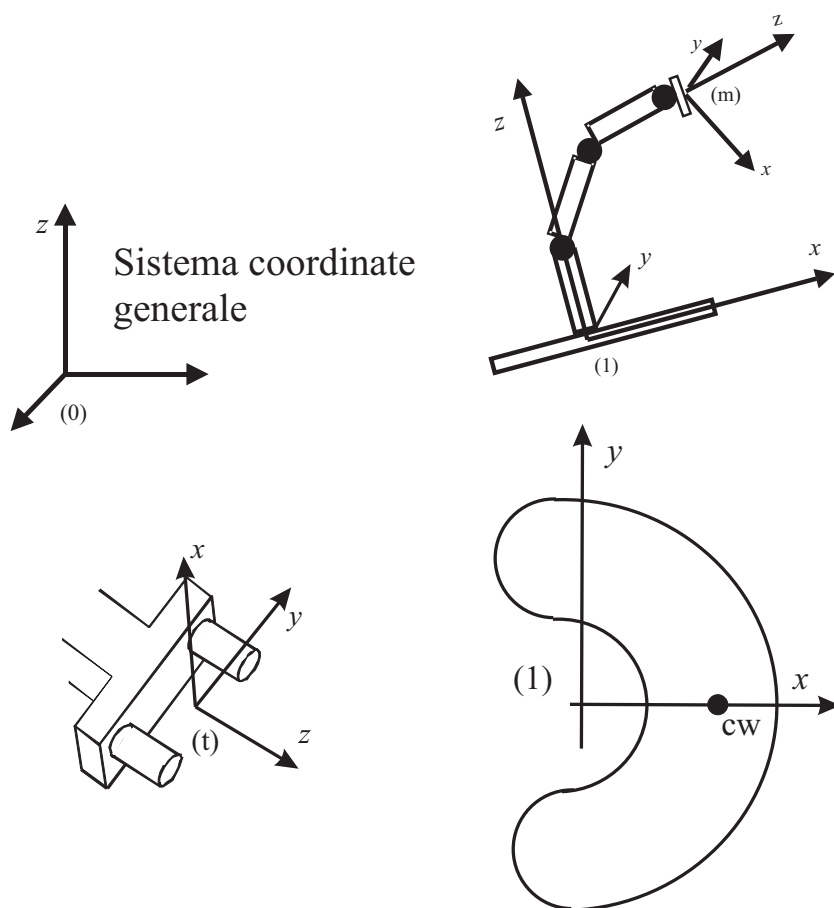


Figura H.16: Esempi di posizionamento delle terne tecniche previste dalla norma UNI EN ISO 9787: del laboratorio (0), della base (1), dell'interfaccia meccanica (m) e dell'utensile (t).

Considerate le dimensioni geometriche di uno specifico manipolatore ed una posa da raggiungere non è detto che tutte le otto soluzioni elencate siano matematicamente ammissibili. Da un punto di vista matematico la non raggiungibilità di un punto viene verificata se l'argomento dell'arcocoseno ha modulo maggiore di uno. Per questo tipo di manipolatore si possono avere nessuna, 4 o 8 soluzioni.

Una volta identificata una soluzione, all'interno del gruppo contenete le numero 1, 2, 5 e 6 (oppure del gruppo 3, 4, 7 e 8), si può affermare che anche le altre del gruppo sono ammissibili. Ciò si verifica immediatamente in maniera geometrica osservando che per ogni soluzione con "gomito alto" esiste anche quella corrispondente con "gomito basso" e viceversa (ad es. soluzioni 1 e 2); inoltre per ciascuna di esse una volta considerata una soluzione, un'altra si ottiene ruotando la torretta (angolo  $\vartheta_1$ ) di  $180^\circ$  e ribaltando il braccio da "davanti" a "dietro" o viceversa (ad es. da soluzione 2 a 5). Non è detto invece che se esiste una soluzione con TCP "in avanti" esista quella "in dietro" o viceversa; infatti il polso non può avvicinarsi né allontanarsi troppo dalla torretta. A questo proposito si osservi che per determinare quali punti siano raggiungibili dal polso possiamo osservare che i link 2 e 3 movimentati da  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_3$  definiscono una zona di piano simile allo spazio di lavoro di un robot SCARA (vedi figura 1.21).

Ovviamente non è detto che tutte le soluzioni matematicamente ammissibili siano poi raggiungibili fisicamente infatti ogni grado di libertà avrà in generale limitazioni di fine corsa.

## H.8 Metodo del grafo di Paul; metodo scissione catena cinematica (§6.7.1 e §6.7.2 Pagg.154-155)

Come esempio si consideri la soluzione analitica del manipolatore Elbow (§6.6 pagg.149-153).

Tutte le volte che una coppia di equazioni è stata sommata dopo aver moltiplicata una di esse per il seno di un'angolo e l'altra per il coseno dello stesso angolo si è ottenuto lo stesso effetto che si sarebbe ottenuto trasportando una delle matrici di posizione dal primo al secondo membro. Ad esempio, una volta determinato l'angolo  $\vartheta_1$ , la matrice  $M_{01}$  può essere portata al secondo membro ottenendo la relazione

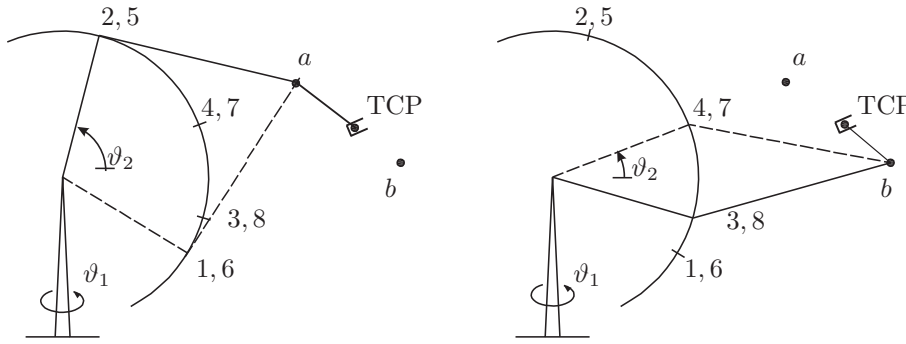


Fig. 6.14 Le otto soluzioni del robot 6R (Elbow Arm).

Per  $\vartheta_1 = \vartheta_a$  (braccio in avanti) il manipolatore può raggiungere le configurazioni 1, 2, 3 e 4, mentre per  $\vartheta_1 = \pi - \vartheta_a$  (indietro) può raggiungere le altre (5, 6, 7 e 8). Per ciascuno dei due casi precedenti il TCP in confronto del centro del polso può stare in fuori (a) o in dentro (b). Infine per ciascuna dei 4 casi citati il gomito può stare in alto o in basso.

matriciale

$$M_{12} \dots M_{56} = M_{01}^{-1} M_{06} = M^*$$

dalla quale è più facile determinare alcune relazioni tra le quali quelle dedotte dalle eq. 7bis e 8bis o quella che porta alla determinazione di  $\vartheta_{234}$  ove compare  $c_1 Z_x + s_1 Z_y$  che deriva dal termine di posizione (1,3) di  $M^*$ . Inoltre nella soluzione del manipolatore compare il termine  $c_1 X_x + s_1 X_y$  che deriva dall'elemento di posizione (1,1) di  $M^*$  mentre  $c_1 T_x + s_1 T_y$  dalla posizione (1,4). Infine il termine  $s_1 Z_x - c_1 Z_y$  deriva dalla posizione (3,3).

### H.9 Metodo dei vincoli equivalenti (§6.7.1 e §6.7.3 Pagg.155)

Come esempio si consideri la soluzione analitica del manipolatore Elbow (§6.6 pagg.149-153) dove per determinare l'angolo  $\vartheta_3$  si è fatto uso di alcune sostituzioni temporanee di variabili denominate  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . Si può verificare che ciò si otterrebbe sostituendo la parte di struttura che comprende i giunti 2, 3 e 4, e quindi i link 2 e 3, con una struttura composta da due accoppiamenti prismatici con movimento pari a  $\Delta x$  e  $\Delta y$  seguiti da un accoppiamento rotoidale che effettui la rotazione  $\vartheta_{234}$ . In altre parole si immagina di sostituire la struttura di sinistra di figura 6.18 con quella di destra ponendo  $\Delta x = a_2 c_2 + a_3 c_{23}$  e  $\Delta y = a_2 s_2 + a_3 s_{23}$ . Quindi i valori di  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_3$  si ottengono osservando che il movimento dei link 2 e 3 nel piano verticale contenente l'asse  $z_0$  ed i link in oggetto ricordano la cinematica di un manipolatore SCARA. I termini  $c_{234} a_4$  e  $s_{234} a_4$  sono le proiezioni nel piano orizzontale e verticale dell'ultimo link.

### H.10 Scelta coordinate, cinematica inversa numerica (Pag.170 §6.9.7)

In pratica alla  $i$ -esima iterazione occorre risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{bmatrix} b_{x_1} & b_{x_2} & & b_{x_i} & & b_{x_n} \\ b_{y_1} & b_{y_2} & & b_{y_i} & & b_{y_n} \\ b_{z_1} & b_{z_2} & \dots & b_{z_i} & \dots & b_{z_n} \\ a_{x_1} & a_{x_2} & & a_{x_i} & & a_{x_n} \\ a_{y_1} & a_{y_2} & & a_{y_i} & & a_{y_n} \\ a_{z_1} & a_{z_2} & & a_{z_i} & & a_{z_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_i \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x^* \\ b_y^* \\ b_z^* \\ a_x^* \\ a_y^* \\ a_z^* \end{bmatrix} \Leftrightarrow J \Delta Q_i = dS \Rightarrow \Delta Q_i = J^{-1} dS$$

$$J = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \bar{J}_1 & \bar{J}_2 & \dots & \bar{J}_i & \dots & \bar{J}_n \end{array} \right] \quad \bar{J}_i = \begin{bmatrix} b_{xi} \\ b_{yi} \\ b_{zi} \\ a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{bmatrix} = F(L_i) \quad L_i = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -a_{zi} & a_{yi} & b_{xi} \\ a_{zi} & 0 & -a_{xi} & b_{yi} \\ -a_{yi} & a_{xi} & 0 & b_{zi} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ove la  $i$ -esima colonna della matrice Jacobiana è ottenuta scegliendo ordinatamente i sei elementi non nulli di  $L_i$ , mentre la colonna dei termini noti  $dS$  è ottenuta in maniera analoga da  $L^*$ .

La matrice inversa può essere proficuamente sostituita con la pseudoinversa per il caso di  $n \neq 6$  o di posizioni vicine a configurazioni singolari.

Step risolutivi della cinematica inversa

1. leggi  $\overline{M}_{on}$  % posa da raggiungere
2. poni  $Q = Q_0$  % valore di primo tentativo
3. poni  $j = 0$  % contatore iterazioni
4. iterazione:
5. poni  $M = \mathbb{I}$
6. per  $i = 1, 2, \dots, n$  % cinematica diretta (per ogni giunto)
7. calcola  $M_r = M(q_i, \Lambda_i)$  % matrice di posa relativa del link  $i$  ( $M_{i-1,i}$ )
8. calcola  $L = L(\Lambda_i)$  % matrice dell'asse del giunto  $i$  in terna locale ( $L_{i(i-1)}$ )
9. calcola  $L_0 = MLM^{-1}$  % matrice dell'asse del giunto in terna 0 ( $L_{i(0)}$ )
10. calcola  $M = MM_r$  % matrice di posa assoluta del link  $i$  ( $M_{0,i}$ )
11. calcola  $\overline{J}_i = F(L_0)$  % colonna dello jacobiano
12. fine ciclo  $i$
13. calcola  $\Delta M = \overline{M}_{on} - M$  % errore di posa
14. se  $\|\Delta M\| < \varepsilon$  % convergenza raggiunta (fine algoritmo):  $Q$  calcolato correttamente
15. poni  $j = j + 1$  % conta iterazioni
16. se  $j > j_{max}$  % il metodo non converge (fine algoritmo):  $Q$  **non** calcolato correttamente
17. calcola  $L^* = \Delta MM^{-1}$
18. calcola  $dS = F(L^*)$  % termine noto
19. calcola  $\Delta Q = J^{-1}dS$  % incremento variabili di giunto
20. calcola  $Q = Q + \Delta Q$  % valore di nuovo tentativo
21. ripeti da **iterazione**

La funzione  $F(L)$  trasforma una matrice  $L$  in una matrice colonna scegliendo ordinatamente i 6 elementi significativi; con il simbolo  $\Lambda_i$  si è indicato l'insieme dei parametri geometrici del giunto  $i$ -esimo.

Si osserva che vale:

$$L^* = (\overline{M}_{on} - M) M^{-1} = \Delta M M^{-1} = \overline{M}_{on} M^{-1} - \mathbb{I}$$

## H.11 Momenti d'inerzia - esempi (pag.201)

Con riferimento alla figura H.17, ed indicando con  $m = v\rho$  la massa, con  $v$  il volume, con  $\rho$  la densità i momenti d'inerzia del prisma con le notazioni  $J$  ed  $I$  sono ( $m = v\rho$ ,  $v = ABL$ )

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{1}{12}m(B^2 + L^2) & J_y &= \frac{1}{12}m(A^2 + L^2) & J_z &= \frac{1}{12}m(A^2 + B^2) \\
 I_{xx} &= \frac{1}{12}mA^2 & I_{yy} &= \frac{1}{12}mB^2 & I_{zz} &= \frac{1}{12}mL^2 \\
 J_{x'} &= \frac{1}{12}mB^2 + \frac{1}{3}mL^2 & J_{y'} &= \frac{1}{12}mA^2 + \frac{1}{3}mL^2 & J_{z'} &= \frac{1}{12}m(A^2 + B^2) \\
 I_{x'x'} &= \frac{1}{12}mA^2 & I_{y'y'} &= \frac{1}{12}mB^2 & I_{z'z'} &= \frac{1}{3}mL^2
 \end{aligned} \tag{H.5}$$

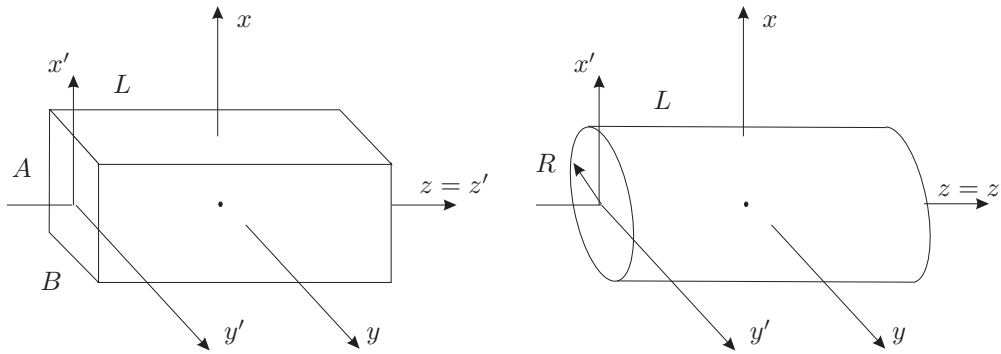


Figura H.17: Esempi di forme geometriche semplici e notazione per il calcolo dei momenti d'inerzia rispetto a vari assi ( $xyz$  sono assi baricentrali).

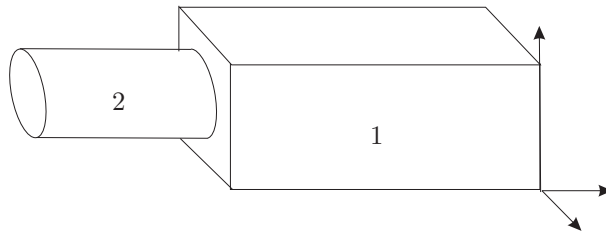


Figura H.18: Esempi di forme geometriche complesse composte da forme semplici.

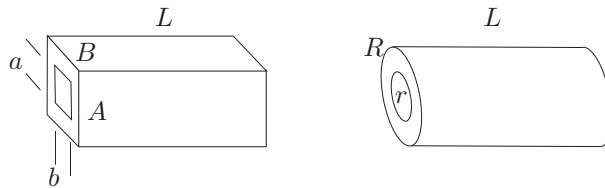


Figura H.19: Esempi di forme geometriche semplici cave.

mentre per il cilindro si ottiene ( $m = v\rho$ ,  $v = \pi R^2 L$ )

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2 & J_y &= \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2 & J_z &= \frac{1}{2}mR^2 \\
 I_{xx} &= \frac{1}{4}mR^2 & I_{yy} &= \frac{1}{4}mR^2 & I_{zz} &= \frac{1}{12}mL^2 \\
 J_{x'} &= \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{3}mL^2 & J_{y'} &= \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{3}mL^2 & J_{z'} &= \frac{1}{2}mR^2 \\
 I_{x'x'} &= \frac{1}{4}mR^2 & I_{y'y'} &= \frac{1}{4}mR^2 & I_{z'z'} &= \frac{1}{3}mL^2
 \end{aligned}
 \tag{H.6}$$

Nel caso di corpi di forma complessa, ma assimilabili alla somma di corpi semplici, è sufficiente sommare le inerzie dopo averle espresse rispetto alla medesima terna d'assi (ad es. fig. H.18).

Mentre nel caso di corpi cavi (fig. H.19), i momenti d'inerzia si calcolano immaginando il corpo pieno e sottraendo l'inerzia corrispondente al corpo vuoto.

Ad esempio per il prisma si ottiene

$$J'_z = \frac{1}{12}\rho ABL(A^2 + B^2) - \frac{1}{12}\rho abL(a^2 + b^2)
 \tag{H.7}$$

ed anche

$$I'_{x'x'} = \frac{\rho}{12}L(BA^3 - ba^3) \quad I'_{y'y'} = \frac{\rho}{12}L(AB^3 - ab^3) \quad I'_{z'z'} = \frac{1}{3}mL^2 = \frac{1}{3}\rho ABL^3
 \tag{H.8}$$

ed analogamente per gli altri momenti d'inerzia.

Nel caso del cilindro pieno il momento d'inerzia  $J_z$  vale

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\pi R^2 L \rho R^2 = \frac{\pi}{2}\rho LR^4 \quad (\text{H.9})$$

per cui il momento d'inerzia del cilindro cavo vale

$$J'_z = \frac{\pi}{2}\rho L (R^4 - r^4) \quad (\text{H.10})$$

e quindi anche

$$I'_{xx} = I'_{yy} = \frac{\pi}{4}\rho L (R^4 - r^4) \quad I'_{zz} = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{\pi}{12}\rho R^2 L^3 \quad (\text{H.11})$$

## H.12 Legge di Moto “ad accelerazione costante” (Pag.238 fig.9.2, pag.249 fig.9.18)

Consideriamo una legge di moto “ad accelerazione costante” che preveda uno spostamento  $\Delta s$  da effettuarsi nel tempo  $T$ .

Con riferimento alle figure ed alle formule delle pagine citate, possiamo scrivere le seguenti equivalenze

$\Delta t_1 = t_1 - t_0$	$\lambda_1 = \Delta t_1 / T$	primo tratto;
$\Delta t_2 = t_2 - t_1$		secondo tratto;
$\Delta t_3 = t_3 - t_2$	$\lambda_2 = \Delta t_3 / T$	terzo tratto;
$T = t_3 - t_0$		durata totale;
$A, D$		valore assoluto dell'accelerazione e della decelerazione;
$v_m$		velocità massima, quella cioè nel secondo tratto.

Valgono i vincoli  $0 < \lambda_1 < 1$ ,  $0 < \lambda_2 < 1$ ,  $0 < \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$ .

Si ottiene

$$V_m = \frac{\Delta s}{T \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)} \quad A = \frac{v_m}{\lambda_1 T} = \frac{\Delta s}{T^2} \frac{1}{\lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)} \quad D = \frac{v_m}{\lambda_2 T} = \frac{\Delta s}{T^2} \frac{1}{\lambda_2 \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)}$$

quindi i coefficienti di velocità nonché quelli di accelerazione positiva e negativa valgono

$$c_v = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)} \quad C_{a+} = \frac{1}{\lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)} \quad C_{a-} = \frac{1}{\lambda_2 \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)}$$

Nel caso di leggi di moto simmetriche si ha ovviamente  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ,  $C_a = C_{a+} = C_{a-}$ .

Le definizioni date di  $A$  accelerazione,  $D$  decelerazione,  $C_{a+}$  e  $C_{a-}$  sono corrette nel caso di movimento positivo ( $\Delta s > 0$ ); nel caso di movimento negativo ( $\Delta s < 0$ ) le formule di  $A$  e  $D$  si scambiano tra loro come anche quelle di  $C_{a+}$  e  $C_{a-}$ .

## H.13 Traiettoria circolare per 3 punti (Pag. 264)

La rotazione è sempre positiva e l'asse di rotazione è calcolato con la formula

$$\bar{z} = \frac{(P_2 - P_1) \times (P_0 - P_1)}{\|(P_2 - P_1) \times (P_0 - P_1)\|}$$

L'ampiezza della rotazione da  $P_0$  a  $P_2$  passando per  $P_1$  si calcola in due passi. Innanzitutto, considerato il triangolo  $P_0P_1P_2$ , si calcola l'angolo in  $P_1$  indicato in figura come  $\phi'$  dal prodotto scalare tra i vettori  $(P_2 - P_1)$  e  $(P_0 - P_1)$ . Infine l'angolo di rotazione  $\phi$  si ottiene ricordando che, considerato un arco di circonferenza, l'angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro. In questo caso interessa l'angolo esplementare

$$\phi = 2\pi - 2\phi' = 2\pi - 2 \operatorname{acos} \left( \frac{(P_2 - P_1) \cdot (P_0 - P_1)}{\|(P_2 - P_1)\| \|(P_0 - P_1)\|} \right)$$

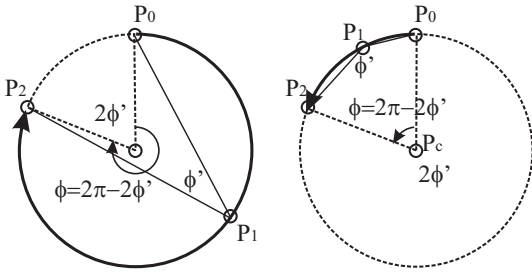


Figura H.20: Segmento circolare per 3 punti: caso generale 3D. L'asse  $z$  è entrante nel foglio di sinistra, uscente in quello di destra.

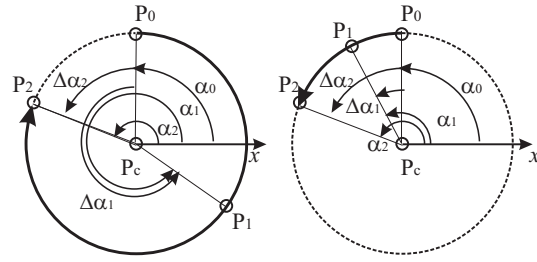


Figura H.21: Segmento circolare per 3 punti: caso piano  $xy$ . A sinistra rotazione antioraria, a destra oraria.

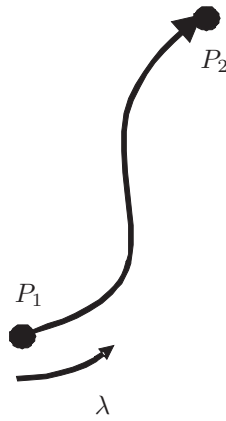


Figura H.22: Movimento in traiettoria assegnata da  $P_1$  a  $P_2$ .

**Casi singolari**

L'arco da percorrere non è definito e la procedura non è applicabile se i tre punti risultano allineati o se due di essi coincidono. In questo caso si può generare un segmento rettilineo. Queste condizioni si identificano osservando che in questi casi si verifica almeno una delle due identità  $\|V_1 \times V_2\| = 0$ ,  $V_1 = \pm V_2$ .

**Cerchio nel piano  $xy$**

Nel caso si debba generare un arco di cerchio nel piano  $xy$  non è necessario utilizzare la procedura indicata, ma si può più semplicemente implementare la procedura seguente. Innanzitutto si calcolano gli angoli  $\alpha_i$  che rappresentano l'inclinazione dei vettori  $P_i - P_c$  rispetto all'asse delle  $x$  nonché la loro differenza con  $\alpha_0$

$$\alpha_i = \text{atan2}(P_{yi} - P_{yc}, P_{xi} - P_{xc}) \quad i = 0, 1, 2$$

$$\Delta\alpha_i = \text{mod}(\alpha_i - \alpha_0, 2\pi) \quad i = 1, 2$$

dove l'operatore "mod" (modulo) indica che l'angolo va espresso nell'intervallo  $0 \div 2\pi$ ; quindi, ad esempio, è necessario aggiungergli  $2\pi$  se è negativo.

L'angolo effettivo di rotazione  $\phi$  si calcola quindi con due diverse modalità assecondo che l'arco debba essere percorso con verso orario (angolo positivo) o antiorario (negativo)

$$\phi = \begin{cases} \Delta\alpha_2 & \Delta\alpha_2 > \Delta\alpha_1 \quad \text{orario} \\ \Delta\alpha_2 - 2\pi & \Delta\alpha_2 < \Delta\alpha_1 \quad \text{antiorario} \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\alpha + \alpha_0) & 0 \leq \alpha \leq \phi \\ y = \rho \sin(\alpha + \alpha_0) & \alpha = \lambda/\rho \end{cases}$$

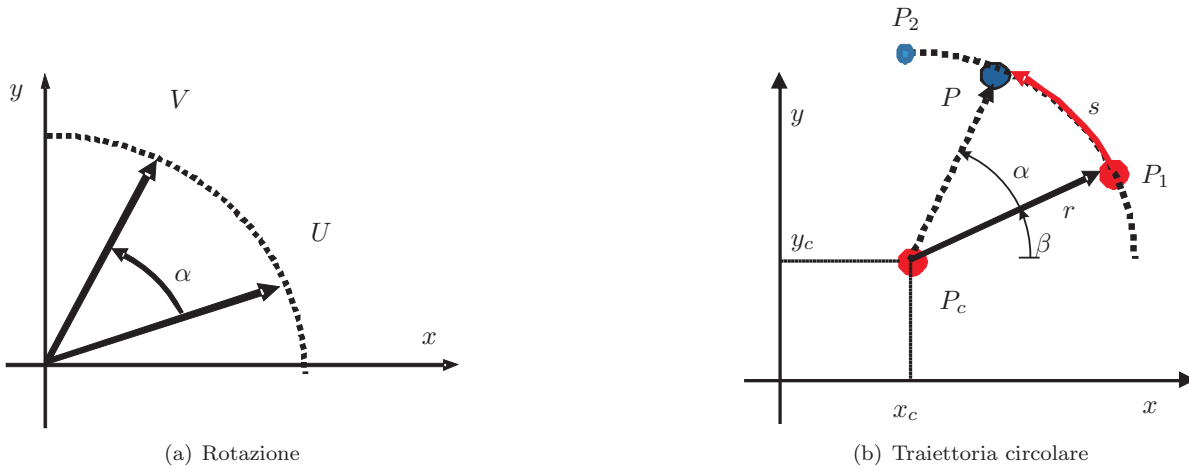


Figura H.23: Movimento in traiettoria circolare.

## H.14 Movimento in traiettoria §9.8

Questa sezione riordina alcuni discorsi già discussi al paragrafo §9.8 del libro.

### H.14.1 Movimento in traiettoria

Nel *movimento in traiettoria* il manipolatore deve muoversi da un punto iniziale  $P_1$  a uno finale  $P_2$  garantendo di rimanere su un percorso predefinito (fig H.22); ad es. segmento di retta, arco di cerchio,... Secondo i casi la posizione di un punto generico  $P$  sarà indicato da due o tre coordinate cartesiane

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dots \end{bmatrix} \quad (\text{H.12})$$

Il movimento è quindi caratterizzato dalla forma della traiettoria e dalla legge di moto con la quale la si percorre.

Come esempio di paragone consideriamo una strada con rettilinei e curve (la traiettoria) su cui una automobile si muove con una certa legge di moto indicata dal variare del contachilometri e dalle letture del tachimetro.

Nel caso del robot il problema consiste nel calcolare la legge di moto da dare ai motori in modo che la pinza del robot segua la traiettoria prevista con la legge di moto desiderata. Il problema può essere scomposto nei sotto problemi:

- scelta della forma della traiettoria  $P(\lambda)$ ;
- scelta della legge di moto di percorrenza della traiettoria  $\lambda(t)$ ,  $\dot{\lambda}(t)$ ,  $\ddot{\lambda}(t)$ ;
- calcolo del movimento della pinza del robot  $S(t)$ ,  $\dot{S}(t)$ ,  $\ddot{S}(t)$ ;
- calcolo del corrispondente movimento dei motori  $Q(t)$ ,  $\dot{Q}(t)$ ,  $\ddot{Q}(t)$  tramite la cinematica inversa.

Consideriamo il caso semplice in cui la traiettoria sia esprimibile in forma parametrica, ovvero la posizione di ogni punto della traiettoria sia esprimibile in funzione di un parametro  $\lambda$ . Particolarmente semplice è il caso in cui  $\lambda$  rappresenta la distanza percorsa; in questo caso talvolta indicheremo questo parametro con  $s$ .

Una volta che sia nota la variazione di  $\lambda$  con il tempo, la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto saranno:

$$\begin{aligned} P &= P(\lambda) \\ \dot{P} &= \frac{\partial P}{\partial \lambda} \dot{\lambda} & \lambda &= f(t) \\ \ddot{P} &= \frac{\partial P}{\partial \lambda} \ddot{\lambda} + \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \dot{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$



ove  $f(t)$  indica la legge di moto di percorrenza che definisce il valore di  $\lambda$  in funzione del tempo  $t$ .

Nel nostro caso siccome ci interessa il movimento della pinza del robot porremo  $P = S$ . In generale la legge di moto da assegnare ai motori si ottiene

- assegnando la traiettoria  $P(\lambda)$ ;
- scegliendo una legge di moto  $f(t)$  che nel tempo scelto faccia variare  $\lambda$  da  $\lambda_1$  (cioè punto  $P_1$ ) a  $\lambda_2$  (cioè punto  $P_2$ );
- scegliendo un opportuno intervallo temporale  $\Delta T$ , campionando nel tempo la legge  $\lambda = f(t)$  e per ogni punto calcolando posizione, velocità ed accelerazione della pinza;  
 $\lambda = f(t)$ ,  $S = P(\lambda)$ ,  $\dot{S} = \dots$ ,  $\ddot{S} = \dots$
- infine calcolando la cinematica inversa per ciascuno dei punti.  
 $Q = G(S)$        $\dot{Q} = J^{-1}\dot{S}$        $\ddot{Q} = J^{-1}(\ddot{S} - \dot{J}\dot{Q})$

Verranno analizzati i casi in cui esiste una semplice rappresentazione parametrica delle traiettorie in funzione dell'ascissa curvilinea: retta, arco di cerchio, elicoide.

### H.14.2 Traiettoria rettilinea

Scegliamo come parametro l'ascissa curvilinea  $\lambda = s$ , e cioè la distanza da  $P_1$ . La lunghezza della traiettoria  $L$  è ovviamente  $L = \|P_2 - P_1\|$ . Occorre quindi scegliere una legge di moto  $s = f(t, T, L)$  che nel tempo assegnato  $T$  faccia variare  $s$  da 0 a  $L$ . Si può utilizzare ad esempio una legge cicloidale, tre tratti, o altro.

Applicando le equazioni (H.13) alla retta, si verifica facilmente che risulta

$$\begin{aligned} S = P(s) &= P_1 + Us & U &= \frac{P_2 - P_1}{\|P_2 - P_1\|} \\ \dot{S} = \dot{P} &= U\dot{s} & 0 \leq s &= f(t, T, L) \leq L \\ \ddot{S} = \ddot{P} &= U\ddot{s} & 0 \leq t &\leq T \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

### H.14.3 Traiettoria circolare in un piano coordinato

#### Rotazione

Consideriamo in via propedeutica il semplice caso in cui si voglia ruotare di un angolo  $\alpha$  un vettore  $U$  giacente nel piano  $xy$  ottenendo  $V$  (fig. H.23(a)). Si dimostra che questa operazione può essere fatta moltiplicandolo per una matrice di rotazione  $R$

$$V = RU \quad \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} \quad (\text{H.15})$$

Questa relazione può essere spiegata indicando con  $\beta$  la direzione del vettore  $U$ , ed osservando che la direzione di  $V$  è ovviamente  $\alpha + \beta$ . A questo punto le componenti di  $V$  sono proporzionali al coseno ed al seno di  $\alpha + \beta$  e quindi ricordando le funzioni trigonometriche della somma di angoli si giunge alla dimostrazione.

#### Generazione del movimento circolare

Con riferimento alla figura H.23(b), scegliamo come parametro l'ascissa curvilinea  $\lambda = s$ , e cioè la distanza da  $P_1$  ed assumiamo che il moto avvenga nel piano  $xy$ . Indichiamo con  $P_c$  il centro del cerchio, con  $r$  il raggio. Vale ovviamente  $s = \alpha r$ ,  $\alpha = s/r$ .

La posizione di un punto generico si ottiene ruotando il vettore  $P_1 - P_c$  dell'opportuno angolo  $\alpha$

$$P = P_1 + R(P_1 - P_c) \quad (\text{H.16})$$

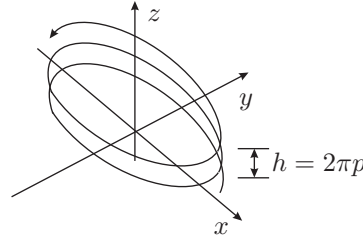


Figura H.24: Movimento in traiettoria elicoidale.

Quindi scegliendo una legge di moto opportuna che faccia variare  $s$  da 0 a  $L$  (distanza tra i due punti  $P_1$  e  $P_2$  misurata sulla circonferenza) nel tempo prefissato  $T$ , si ottiene

$$\begin{aligned}
 P &= P_c + R(P_1 - P_c) & R &= R(\alpha) \\
 \dot{P} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} R (P_1 - P_c) \dot{\alpha} & \alpha &= s/r \\
 \dot{P} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} R (P_1 - P_c) \ddot{\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} R (P_1 - P_c) \dot{\alpha}^2 & s &= f(t, T, L)
 \end{aligned} \tag{H.17}$$

con

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{H.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} R = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} R = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{H.19}$$

### H.14.4 Traiettoria elicoidale

Una traiettoria elicoidale (figura H.24) è derivabile da una traiettoria circolare aggiungendo un avanzamento nel piano ortogonale a quello della rotazione. Se il movimento circolare avviene nel piano  $xy$  e quello di avanzamento è in direzione  $z$ , allora le generiche equazioni si possono derivare da quelle del moto circolare aggiungendo la terza coordinata con spostamento proporzionale alla rotazione

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c + r \cos(\alpha + \alpha_0) \\ y_c + r \sin(\alpha + \alpha_0) \\ z_c + p\alpha \end{bmatrix} = P_c + \overline{R}(P_1 - P_c) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha p \end{bmatrix} \tag{H.20}$$

con

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{H.21}$$

ove  $p$  è il passo dell'elica che si ottiene dividendo lo spazio percorso in un giro lungo  $z$  per l'angolo corrispondente ( $2\pi$  ragionando in radianti) cioè  $p = h/(2\pi)$ , e  $P_c$  è un punto qualsiasi dell'asse dell'elicoide. La lunghezza di un tratto di elicoide si ottiene dal teorema di Pitagora sommando lo spostamento nel piano  $\alpha r$ , con quello verticale  $\alpha p$  ottenendo

$$s = \alpha \sqrt{r^2 + p^2} \tag{H.22}$$

questa relazione si dimostra immaginando che l'elicoide sia avvolto su un cilindro di raggio  $r$ , e immaginando di srotolare il cilindro stesso su di un piano (figura H.25)

### H.14.5 Traiettorie circolari ed elicoidali con giacitura generale

Qualora le traiettorie circolari o elicoidali avvengano secondo piani o direzioni non parallele a piani coordinati, è possibile sviluppare il movimento in un sistema di riferimento locale con assi coordinati opportuni e poi effettuare una rototraslazione dei vari punti calcolati per riportarli nel sistema di riferimento generale.

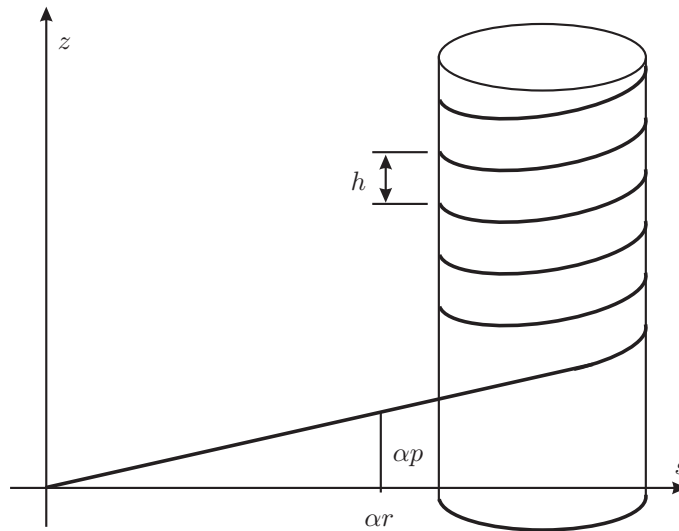


Figura H.25: Calcolo della lunghezza di un'elica.

## H.15 Effetto elasticità nelle trasmissioni (Pag.294 §10.5.5)

### H.15.1 Introduzione, misura diretta e indiretta di posizione

Si considera il caso in cui si voglia controllare il movimento di un organo meccanico che si trova al termine di una catena cinematica che include elementi elastici. In questo caso il movimento dell'organo in questione può essere significativamente differente da quello che si potrebbe dedurre immaginando la trasmissione perfettamente rigida.

Consideriamo il caso in cui l'elasticità si possa ritenere concentrata in un punto.

Facciamo riferimento alle figure H.26, H.27 e H.28

La retroazione di velocità è sempre ottenuta misurando il movimento dell'albero motore, mentre quella di posizione può basarsi sulla misura del movimento del motore o su quella del carico. Nel primo caso si parla di *misura indiretta* di posizione, nel secondo di *misura diretta*. In caso di trasmissione ideale e rigida, con misura diretta o indiretta di posizione, si otterrebbero risultati identici tuttavia nei casi pratici si possono ottenere risultati molto diversi.

La retroazione con misura diretta permette di avere maggiore precisione di movimento perché la retroazione tiene conto del movimento effettivo del carico compensando eventuali errori nella trasmissione dovuti a imperfezione geometrica, giochi o deformazione dovute dai carichi. Tuttavia rischia di rendere instabile il sistema nel caso in cui la trasmissione abbia cedevolezza significativa o giochi e sia presente un elevato attrito statico (o a basse velocità) che potrebbero determinare il fenomeno dello *stick-slip*.

Inoltre, nel caso di movimenti rotatori con misura tramite encoder, il posizionamento del trasduttore sull'albero motore da una migliore risoluzione di misura a causa della riduzione e consente l'impiego di trasduttori con meno tacche al giro. Infatti un encoder con un numero  $N_s$  di passi al giro garantisce una risoluzione angolare pari a  $\Delta\vartheta = 2\pi/(4N_s)$ . Il fattore 4 è valido per i normali encoder incrementali con canali in quadratura. Se tra encoder e carico è presente un riduttore di velocità con riduzione pari a  $\eta$  si ottiene una risoluzione più elevata e pari a  $\Delta\vartheta = 2\pi\tau/(4N_s)$  (generalmente  $\tau < 1$ ). Quindi per avere una prefissata risoluzione occorre un numero di passi  $N_s \geq 2\pi/(4\tau\Delta\vartheta)$ .

Infine nel caso di moderni motori brushless con resolver, l'adozione di una misura indiretta consente il risparmio di un trasduttore in quando il resolver consente sia la misura della posizione che della velocità.

In ogni caso, per motivi costruttivi, nei manipolatori industriali non è quasi mai possibile realizzare una misura diretta di posizione, mentre lo è quasi sempre negli assi a geometria cartesiana delle macchine utensili ove una riga ottica (o altro dispositivo di misura) può essere agevolmente accostato al carro mobile (figura H.28).

La decisione sull'utilizzo della misura diretta o indiretta di posizione va fatta di volta in volta.

### H.15.2 Modello di controllo con trasmissione elastica

Lo schema di riferimento è quello di figura H.26 che come vedremo può essere trasformato in quello equivalente di figura H.27. I simboli hanno il seguente significato

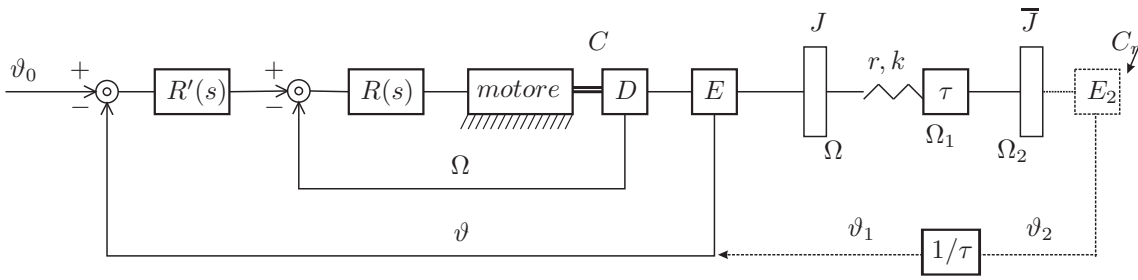


Figura H.26: Schema di un azionamento ad un grado di libertà con riduttore di velocità ed elasticità nella trasmissione e possibili schemi di retroazione.

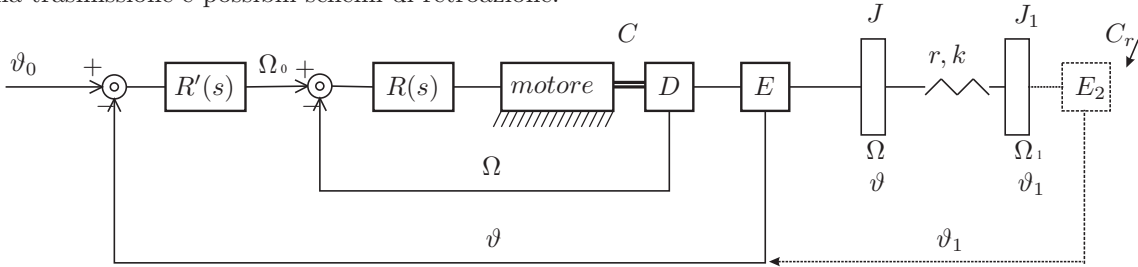


Figura H.27: Schema equivalente di un azionamento ad un grado di libertà senza riduttore di velocità (\$\tau = 1\$) ed elasticità nella trasmissione e possibili schemi di retroazione.

- $\vartheta$                     posizione angolare del motore;
- $\vartheta_1 = \vartheta_2/\tau$         posizione angolare equivalente del carico per  $\tau = 1$ ;
- $\vartheta_2$                     posizione angolare del carico;
- $\Omega = \dot{\vartheta}$                 velocità del motore;
- $\Omega_1 = \dot{\vartheta}_1$             velocità del carico dopo la connessione elastica equivalente;
- $\Omega_2 = \dot{\vartheta}_2$             velocità del carico;
- $\tau = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$     rapporto di trasmissione del riduttore di velocità (supposto idealmente rigido);
- $J$                         momento di inerzia di motore e trasmissione;
- $\bar{J}$                         momento di inerzia del carico (braccio del robot) a valle del riduttore;
- $J_1 = \tau_2 \bar{J}$             inerzia equivalente del carico per trasmissione unitaria;
- $k$                         rigidità equivalente della trasmissione (albero + riduttore);
- $r$                         costante di smorzamento;
- $C$                         coppia motrice;
- $C_{2r}$                     coppia resistente;
- $C_r = \tau C_{2r}$           coppia resistente equivalente;

In assenza di elasticità (trasmissione rigida) si avrebbe  $\vartheta = \vartheta_1$ ,  $\Omega = \Omega_1$ ,  $\Omega_2 = \tau\Omega$ .

Per semplificare i calcoli è possibile eliminare il rapporto di trasmissione  $\tau$  pur di sostituire i valori di coppia resistente, inerzia, posizione angolare, velocità e accelerazione con quelli equivalenti; si giunge così allo schema equivalente di figura H.27. Nell'esempio seguente viene trattato il caso di carico con moto rotatorio, ma è evidente l'estensione al caso di moto traslatorio ove compaiono masse al posto di momenti d'inerzia, forze al posto di coppie, traslazioni al posto di rotazioni (figura H.29).

Con riferimento alle figure H.27 e H.29, lo sviluppo delle equazioni necessarie allo studio può essere ottenuto a partire dall'equilibrio alla rotazione delle masse solidali al motore e quelle del carico i cui movimenti sono tra loro accoppiati dalla trasmissione tramite la quale si scambiano coppie elastiche e viscosi

$$\begin{cases} C = k(\vartheta_1 - \vartheta) + r(\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}) + J\ddot{\vartheta} & \text{masse su albero motore} \\ C_r = k(\vartheta - \vartheta_1) + r(\dot{\vartheta} - \dot{\vartheta}_1) + J_1\ddot{\vartheta}_1 & \text{masse su asse del carico} \end{cases}$$

Passando al dominio delle trasformate di Laplace, con semplici calcoli, si può giungere allo schema a blocchi ed alle funzioni di trasferimento di figura H.30. Si tratta di uno schema con due ingressi (la coppia motrice  $C$  e quella resistente  $C_r$ ) e di due uscite (la posizione del motore  $\vartheta$  e quella equivalente del carico  $\vartheta_1$ ). Questo schema può essere facilmente convertito in quello ad esso equivalente di figura H.31 nel quale sono state aggiunte linee tratteggiate che indicano un classico schema di controllo con anelli di

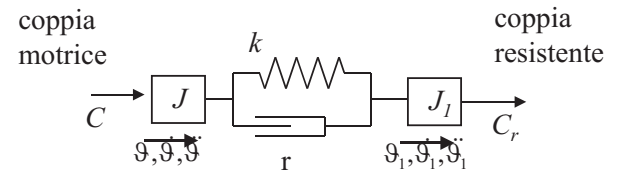
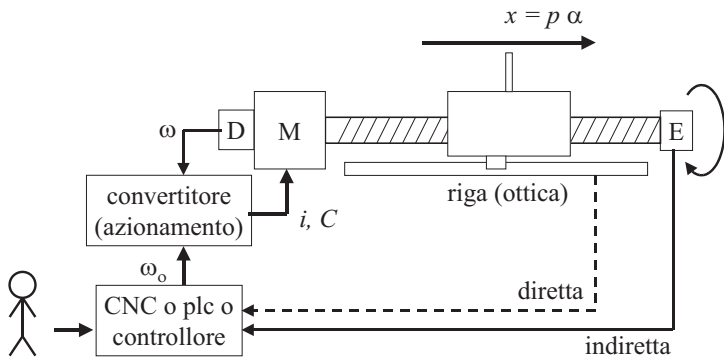


Figura H.29: Schema equivalente lineare di una trasmissione con elasticità.

Figura H.28: Retroazione tramite misura diretta o indiretta di posizione (schema di principio).

retroazione di velocità e posizione annidati. Viene considerato sia il caso di misura diretta che quello di misura indiretta di posizione.

Le funzioni di trasferimento sulle quali è necessario indagare sono quelle che legano il movimento del carico  $\vartheta_1$  ai comandi  $\vartheta_o$  (posizione desiderata) ed alla coppia resistente  $C_r$ .

### H.15.3 Retroazione di velocità

Analizziamo innanzitutto la regolazione di velocità. Con riferimento allo schema di figura H.31 calcoliamo la funzione di trasferimento d'anello  $L$  nel caso di regolatore proporzionale  $R = k_p$  nonché la funzione che lega tra loro le rotazioni di motore e carico (figure H.32 e H.33)

$$L = \frac{\dot{\vartheta}}{E_{\dot{\vartheta}}} = k_p \frac{\dot{\vartheta}}{C} = k_p \frac{1}{s(J + J_1)} \frac{s^2 + \frac{2\xi_1}{\omega_1}s + 1}{\frac{s^2}{\omega_2^2} + \frac{2\xi_2}{\omega_2}s + 1} \quad H(s) = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{\dot{\vartheta}_1}{\dot{\vartheta}} = \frac{\ddot{\vartheta}_1}{\ddot{\vartheta}} = \frac{rs + k}{J_1s^2 + rs + k} = \frac{\frac{r}{k}s + 1}{\frac{s^2}{\omega_1^2} + \frac{2\xi_1}{\omega_1}s + 1}$$

ove le pulsazioni  $\omega$  e i relativi smorzamenti  $\xi$  valgono

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{J_1}} \quad \xi_1 = \frac{r}{\sqrt{2kJ_1}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{J^*}} \quad \xi_2 = \frac{r}{2\sqrt{kJ^*}} \quad J^* = \frac{J J_1}{J + J_1}$$

si riconosce che  $\omega_1$  è la pulsazione propria di vibrazione del carico immaginando che l'albero motore sia bloccato, mentre  $\omega_2$  è la pulsazione propria di vibrazione del sistema immaginando albero motore e carico liberi (gli alberi vibrerebbero in controfase tra di loro).

Osserviamo le funzioni di trasferimento di figura H.32; notiamo una *antirisonanza* (modulo quasi nullo) alla pulsazione  $\omega_1$  ed un picco di *risonanza* (modulo molto elevato) alla pulsazione  $\omega_2$ . Al crescere della rigidezza  $k$  i due picchi si spostano verso destra. Per frequenze basse e inferiori alla pulsazione di antirisonanza ( $\omega \ll \omega_1$ ) il sistema si comporta come se fosse rigido e quindi con inerzia totale pari alla somma di quella dell'albero motore più quella equivalente del carico  $\dot{\vartheta}/C \simeq \dot{\vartheta}_1/C \simeq 1/(s(J + J_1))$ . Per pulsazioni elevate e superiori a quella di risonanza ( $\omega \gg \omega_1$ ) il sistema si comporta come se motore e carico fossero sconnessi. Il motore si muove secondo la funzione di trasferimento  $\dot{\vartheta}/C \simeq 1/(sJ)$ , ma il carico rimane quasi fermo (vedi anche figura H.33).

La figura H.34 descrive lo schema retroazionato di regolazione della velocità. Utilizzando un regolatore puramente proporzionale  $k_p$  si ottiene la funzione di trasferimento di figura H.37. A sinistra è quello che accade per bassi guadagni, a destra la situazione per alti guadagni.

Nel grafico in alto è riportata la funzione di trasferimento d'anello e quella che si ottiene per il sistema retroazionato con ingresso il comando di velocità e uscita la velocità del motore.

Il grafico centrale rappresenta la funzione di trasferimento da albero motore a carico, l'ultimo grafico è la funzione di trasferimento da comando a carico. Quest'ultima funzione di trasferimento è il prodotto delle due precedentemente citate e graficamente si ottiene come somma dei due diagrammi che lo precedono nella figura (i diagrammi sono in scala doppia logaritmica).

Osserviamo che per bassi guadagni abbiamo banda passante ridotta, ma il sistema si comporta come se fosse rigido. Per alti guadagni, la banda passante non può comunque superare  $\omega_1$  al cui valore si verifica risonanza.

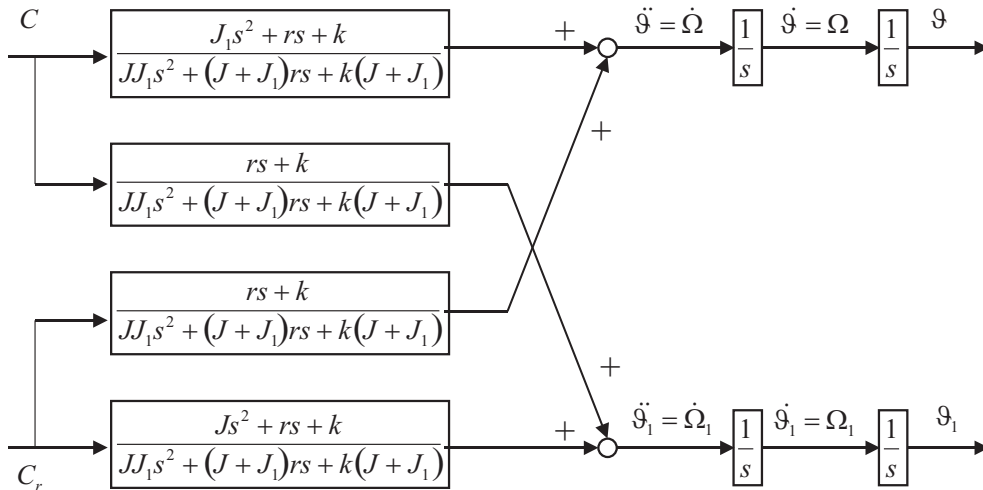


Figura H.30: Schema a blocchi e funzioni di trasferimento da coppia motrice  $C$  e coppia resistente  $C_r$  a posizioni angolari dell'albero motore  $\vartheta$  e del carico  $\vartheta_1$ .

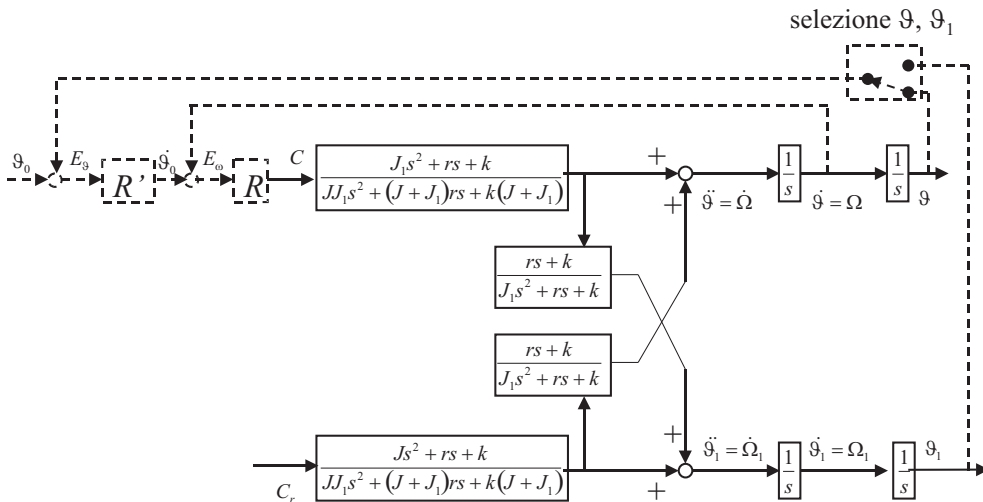


Figura H.31: Schema a blocchi equivalente a quello di figura H.30; tratteggiato reatroazione (diretta) di velocità e (in)diretta di posizione.

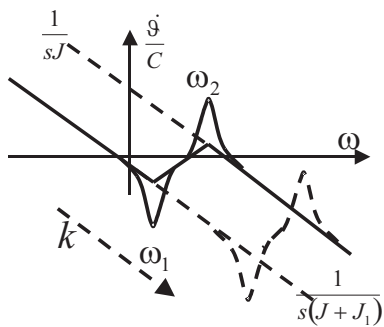


Figura H.32: La funzione di trasferimento da coppia motrice a velocità del motore  $\dot{\vartheta}/C$ .

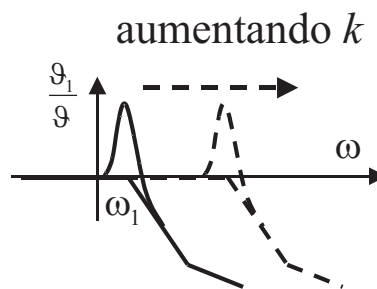


Figura H.33: La funzione di trasferimento da movimento motore a movimento del carico.

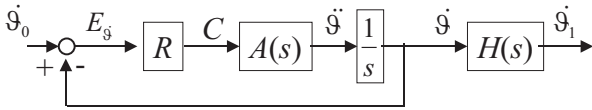


Figura H.34: Anello di retroazione di velocità.

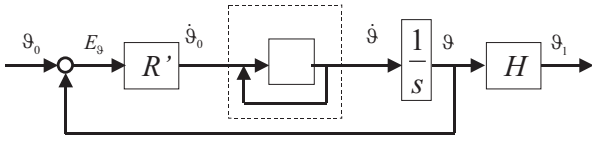


Figura H.35: Anello di retroazione di posizione con misura indiretta.

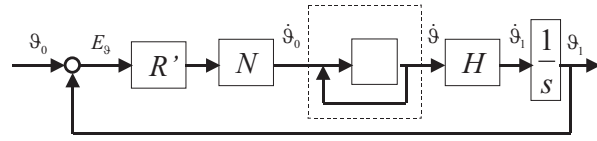


Figura H.36: Anello di retroazione di posizione con misura diretta.

### H.15.4 Retroazione di posizione

L'anello di posizione può essere chiuso tramite misura diretta o indiretta di posizione. In ogni caso si vuole evitare che la funzione di trasferimento includa delle risonanze.

Consideriamo innanzitutto il caso in cui l'anello di posizione venga chiuso sull'albero motore (misura indiretta) con un regolatore proporzionale (figura H.35). Per evitare di avere poli complessi e coniugati (risonanza) è necessario che l'anello di velocità non ne abbia ed è necessario tenere guadagni limitati anche nell'anello di posizione (vedi caso trattato al §10.4.2 pag. 285-286).

In figura H.36 viene illustrato uno schema che può essere ottenuto nel caso di misura diretta di posizione e che consente di avere una banda passante più elevata. Il blocco indicato con  $N$  è un *notch filter* (filtro a gola) che ha la seguente funzione di trasferimento

$$N = \frac{\frac{s^2}{\omega_f^2} + \frac{2\xi_n}{\omega_f} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_f^2} + \frac{2\xi_d}{\omega_f} s + 1} \quad \xi_n < 1 \quad \xi_d > 1$$

Numeratore e denominatore sono del secondo ordine con la stessa pulsazione  $\omega_f$ ; il numeratore ha smorzamento piccolo ( $< 1$ ) mentre il denominatore ha smorzamento elevato ( $> 1$ ). Si ottiene una funzione di trasferimento quasi unitaria con *una gola* di antirisonanza che se opportunamente tarata in pulsazione e smorzamento può compensare la risonanza dell'anello di velocità (figura H.38). Ciò consente di chiudere l'anello di posizione sull'albero del carico, includendo al suo interno la trasmissione, e tenere una banda passante più elevata.

Le caratteristiche più salienti dei due schemi illustrati sono evidenziate in tabella H.38.

### H.15.5 Effetto delle coppie resistenti

???  
???

misura di posizione	indiretta	diretta
retroazione su	prima massa	seconda massa
realizzabilità	sempre	non sempre
trasmissione, elasticità, giochi	fuori dall'anello di retroazione	all'interno dell'anello di retroazione
effetto dell'attrito	riduce la precisione	pericolo di instabilità
banda passante	limitata da pericolo di risonanza	maggiore
limitazione rischio risonanza	occorre ridurre banda passante	eliminabile con <i>notch filter</i> o regolatori evoluti
precisione di regolazione	minore	maggiore
sensibilità a coppie resistenti	maggiore	minore

Tabella H.1: Caratteristiche della regolazione di posizione con misura diretta ed indiretta di posizione.

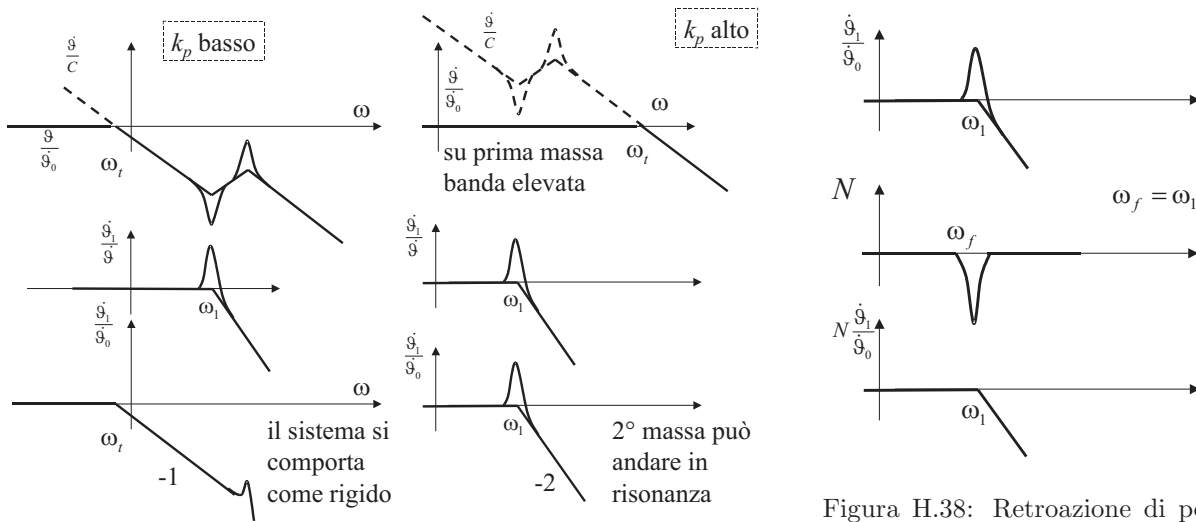


Figura H.37: Retroazione di velocità con  $R = k_p$ . Dall'alto: funzione di trasferimento d'anello  $L = k_p \dot{\vartheta}/C$  e dei comandi  $\dot{\vartheta}/\dot{\vartheta}_o$  (velocità motore); da velocità motore a velocità carico; da comando a velocità carico. A sinistra guadagno basso, a destra guadagno elevato.

Figura H.38: Retroazione di posizione con misura diretta di posizione. Il notch filter può compensare l'effetto della risonanza presente Nell'anello di velocità a causa del guadagno e banda elevati.

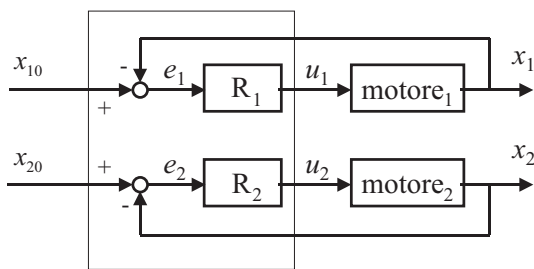


Figura H.39: Regolatore decentralizzato (ad assi indipendenti).

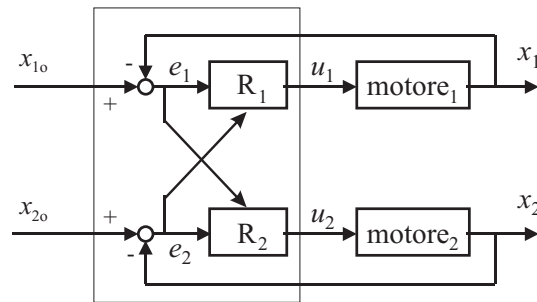


Figura H.40: regolatore Centralizzato (ad assi interdipendenti).

## H.16 Controllo centralizzato e decentralizzato (Pag.298 §10.6.1)

Vengono illustrati meglio i concetti che stanno alla base di controlli centralizzati e brevemente presentati degli esempi.

Nei controlli decentralizzati viene generato un movimento di riferimento per ogni giunto e ciascuno di essi è poi controllato in maniera indipendente dagli altri. In altre parole l'azione di controllo su ogni motore dipende solo dal suo errore di inseguimento e non da quello degli altri attuatori.

Nei controlli centralizzati invece gli anelli di retroazione di due o più giunti interferiscono tra di loro.

Ad esempio in un sistema a 2 gradi di libertà indichiamo con  $x_1$  e  $x_2$  le grandezze da controllare, con  $x_{1o}$  e  $x_{2o}$  i loro valori desiderati e con  $u_1$  e  $u_2$  le due azioni di controllo. Nel caso di controllore decentralizzato  $u_1$  dipende solo da  $x_1$  e  $x_{1o}$  (fig. H.39), mentre in un controllo centralizzato esso può dipendere anche da  $x_2$  e  $x_{2o}$  (ed analogamente per  $u_2$ ) (fig. H.40); cioè

controllo decentralizzato	controllo centralizzato
$u_1 = f_1(x_1, x_{1o})$	$u_1 = f_1(x_1, x_{1o}, x_2, x_{2o})$
$u_2 = f_2(x_2, x_{2o})$	$u_2 = f_2(x_1, x_{1o}, x_2, x_{2o})$

Esempi di controlli centralizzati sono

- controlli a coppia precalcolata;
- controlli a dinamica inversa;



- controlli ad assi virtuali;
- controlli nello spazio di lavoro.

Il controllo ad assi virtuali e nello spazio di lavoro posso essere sostanzialmente molto simili tra loro; la loro diversa denominazione deriva da diversi ambiti applicativi in cui sono utilizzati.

Analizziamo ora brevemente i controlli dinamica inversa e quelli a coppia precalcolata. Con riferimento al §2.8 pag. 48, si assume che il comportamento dinamico del robot sia descritto dall'equazione

$$F_q = M\ddot{Q} + V(Q, \dot{Q})$$

ove la matrice delle masse  $M$  dipende da  $Q$  ed il termine  $V(\cdot)$  che dipende da  $Q$  e da  $\dot{Q}$  congloba anche gli effetti dovuti al peso ed agli attriti.

Si immagina di avere a disposizione delle stime del modello dinamico del manipolatore e cioè delle matrici  $\widehat{M}$  e  $\widehat{V}$  tali che

$$\widehat{M} \simeq M \quad \widehat{V}(\cdot) \simeq V(\cdot)$$

è pertanto possibile stimare la coppia necessaria a fare avvenire un certo movimento

$$\widehat{F}_q = \widehat{M}\ddot{Q} + \widehat{V}(Q, \dot{Q})$$

### Coppia precalcolata nello spazio dei giunti

Si potrebbe così ipotizzare di controllare il manipolatore in anello aperto chiedendo ai motori di generare la coppia  $\widehat{F}_q$ . Se la stima dello stato iniziale del manipolatore ( $Q$  e  $\dot{Q}$ ) fosse perfetta e se il modello dinamico fosse perfetto il manipolatore si muoverebbe esattamente come previsto. Tuttavia è inevitabile la presenza di qualche imperfezione e quindi il manipolatore devierà dalla traiettoria prevista. Sarà quindi necessario introdurre una retroazione di posizione e di velocità (vedi schema 1 figura H.41). Indichiamo con  $E_q = Q_0 - Q$  l'errore di posizione e con  $sE_q$  la sua derivata che coincide con l'errore di velocità. Il termine  $(K_p + sK_v)E_q$  costituisce quindi un regolatore di tipo PD che garantisce stabilità e limitato errore di inseguimento. Se il modello dinamico è buono, questo schema garantisce un errore di inseguimento ridotto rispetto a quello che si potrebbe ottenere con un PD senza il termine di coppia precalcolata.

Lo schema può anche essere ridisegnato in forma perfettamente equivalente come in schema 1bis (figura H.43) che evidenzia come il termine non lineare di predizione di coppia possa essere visto come un termine di compensazione in avanti (Feed Forward).

In queste condizioni l'equazione differenziale che descrive la dinamica del sistema si può scrivere sommando i termini di coppia calcolata ed eguagliandoli a quelli entranti nel manipolatore

$$\widehat{M}(Q_0)\ddot{Q}_0 + \widehat{V}(Q_0, \dot{Q}_0) + K_p(Q_0 - Q) + K_v(\dot{Q}_0 - \dot{Q}) = M(Q)\ddot{Q} + V(Q, \dot{Q})$$

nelle ipotesi che  $\widehat{M}(Q_0) \simeq M(Q)$  e  $\widehat{V}(Q_0, \dot{Q}_0) \simeq V(Q, \dot{Q})$  giungiamo all'equazione

$$M(\ddot{Q}_0 - \ddot{Q}) + K_v(\dot{Q}_0 - \dot{Q}) + K_p(Q_0 - Q) = 0$$

Questa è un'equazione differenziale di ordine  $2n$  ove  $n$  il numero dei gradi di libertà del manipolatore. L'equazione non è lineare perché  $M$  dipende da  $Q$  in maniera non lineare. Inoltre i movimenti dei vari gradi di libertà sono tra loro accoppiati perché la matrice  $M$  non è diagonale.

### Dinamica inversa nello spazio dei giunti

Le ipotesi semplificative indicate nel regolatore a coppia precalcolata possono essere in parte rilassate utilizzando lo schema a dinamica inversa (schemi 2 o equivalentemente 2bis figure H.42 e H.44) ove il termine  $\widehat{V}$  è calcolato utilizzando posizioni e velocità misurate e non quelle desiderate. In questo caso la condizione su  $\widehat{V}$  è meno stringente essendo sufficiente avere  $\widehat{V}(Q, \dot{Q}) \simeq V(Q, \dot{Q})$  e non anche  $|\partial\widehat{V}/\partial Q(Q - Q_0)| < \varepsilon_1$  e  $|\partial\widehat{V}/\partial\dot{Q}(\dot{Q} - \dot{Q}_0)| < \varepsilon_2$  con  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  costanti piccole.

### Disaccoppiamento dei giunti

Gli schemi precedenti possono essere migliorati spostando il blocco  $\widehat{M}$  in posizione differente in modo che anche il termine del regolatore PD lo attraversi (vedi schemi 1b e 2b figure H.45 e H.46). In questo caso, sotto le medesime ipotesi semplificative appena viste l'equazione differenziale diventa

$$M(\ddot{Q}_0 - \ddot{Q}) + MK_v(\dot{Q}_0 - \dot{Q}) + MK_p(Q_0 - Q) = 0$$

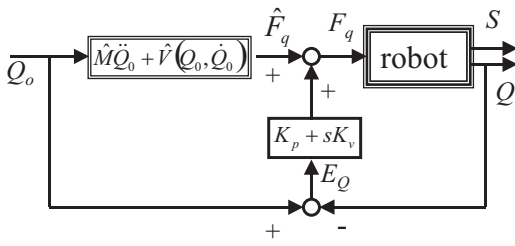


Figura H.41: Coppia precalcolata nello spazio dei giunti (schema 1).

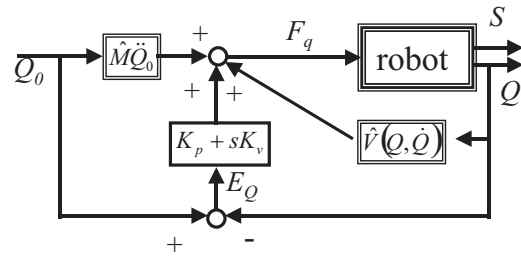


Figura H.42: Dinamica inversa nello spazio dei giunti (schema 2).

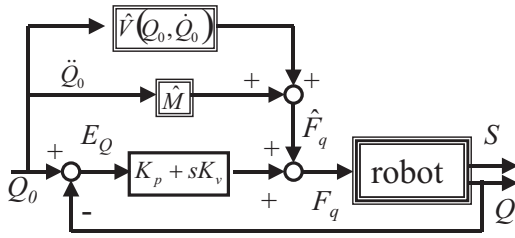


Figura H.43: Controllo a coppia precalcolata nello spazio dei giunti (schema 1bis perfettamente equivalente a schema 1).

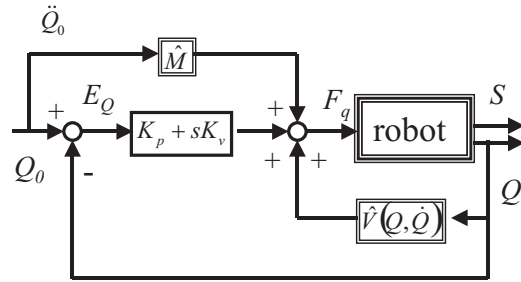


Figura H.44: Controllo a dinamica inversa nello spazio dei giunti (schema 2bis perfettamente equivalente a schema 2).

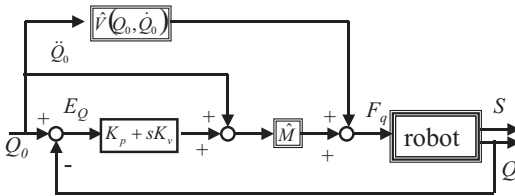


Figura H.45: Controllo a coppia precalcolata nello spazio dei giunti a giunti disaccoppiati (schema 1b).

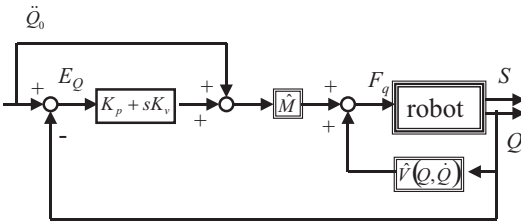


Figura H.46: Controllo a dinamica inversa nello spazio dei giunti a giunti disaccoppiati (schema 2b).

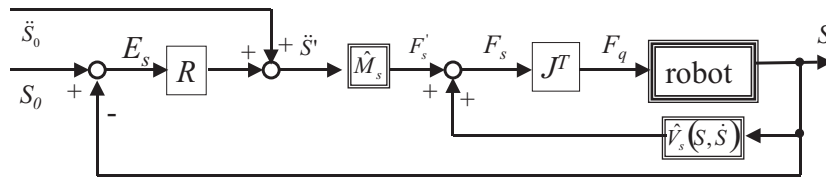


Figura H.47: Controllo a dinamica inversa nello spazio operativo - teorico (schema 3a).

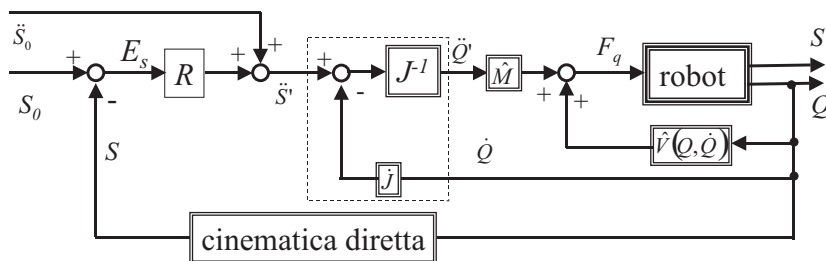


Figura H.48: Controllo a dinamica inversa nello spazio operativo - pratico (schema 3b).

ricordando che la matrice delle masse è sempre definita positiva, e quindi invertibile, la relazione appena scritta può essere semplificata moltiplicando a sinistra per  $M^{-1}$  ottenendo

$$(\ddot{Q}_0 - \ddot{Q}) + K_v (\dot{Q}_0 - \dot{Q}) + K_p (Q_0 - Q) = 0$$

Questa relazione è di tipo lineare, è scomparsa la dipendenza dalla dinamica del manipolatore, e se le matrici dei guadagni  $K_p$  e  $K_v$  sono diagonali, i vari giunti risultano tra loro disaccoppiati e quindi facilmente regolabili agendo sulle matrici dei guadagni.

Indicando con  $k_p$  e  $k_v$  i guadagni di un asse, e ricordando che il denominatore di una funzione di trasferimento del secondo ordine è esprimibile come  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ , la pulsazione naturale e lo smorzamento dell'asse valgono

$$\omega_n = \sqrt{k_p} \quad \xi = \frac{k_v}{2\sqrt{k_p}}$$

e sembrerebbe quindi possibile fissare arbitrariamente questi valori agendo sui guadagni. Il sistema avrebbe funzione di trasferimento unitaria con errore di inseguimento tendente asintoticamente a zero con transitorio del secondo ordine.

E' questo un assunto teorico al quale ci si può solo avvicinare qualora si disponga di un modello veramente buono infatti saranno necessariamente presenti inevitabili errori di misura e approssimazioni di modellizzazione. Inoltre il modello considera gli attuatori ideali con tempo di risposta nullo e senza limitazioni di potenza.

### Dinamica inversa nello spazio operativo

Gli schemi di controllo indicati possono anche essere realizzati nello spazio operativo per un controllo più diretto dell'errore d'inseguimento (vedi ad es. schemi 3a, 3b figure H.47 e H.48) ove il regolatore può essere di tipo PI ponendo  $R = K_p + sK_v$ . Per fare ciò è necessario esprimere tutte le grandezze dinamiche in funzione delle coordinate utensile utilizzando le relazioni cinetostatiche  $S = F(Q)$ ,  $\dot{S} = J\dot{Q}$ ,  $\ddot{S} = J\ddot{Q} + \dot{J}\dot{Q}$ ,  $F_q = J^T F_s$  le quali permettono anche di trasformare la matrice delle masse

$$M_s = J^{-T} M J^{-1}$$

si noti a questo proposito l'analogia tra le relazione seguenti

$$F_q = M\ddot{Q} \quad \Leftrightarrow \quad F_s = M_s\ddot{S}$$

Convertendo lo schema 2b (figura H.46 dinamica inversa nello spazio dei giunti) si perviene così allo schema 3a (H.47 dinamica inversa nello spazio di lavoro - schema teorico). Tuttavia la realizzazione pratica di questo schema presenta diversi problemi:

1. normalmente non è disponibile una misura della posa dell'utensile ed è necessario stimarla a partire dalle coordinate ai giunti;
2. normalmente le relazioni dinamiche (jacobiano, matrice delle masse, termini  $\widehat{V}, \dots$ ) sono più facilmente esprimibili in funzione delle coordinate ai giunti  $Q$  piuttosto che in quelle nello spazio operativo;
3. la sola conoscenza delle coordinate nello spazio operativo non dà un'informazione completa sullo stato del sistema (ad esempio la stessa posizione  $S$  può essere raggiunta con diversi valori di  $Q$ ).

Da un punto di vista pratico è quindi inevitabile dover modificare lo schema ottenendo lo schema "pratico" 3b (figura H.48); il blocco tratteggiato è quello che esegue l'operazione  $\ddot{Q}' = J^{-1}(\ddot{S}' - \dot{J}\dot{Q})$ .

Anche in questo caso, con regolatore PI ( $R = K_p + sK_v$ ), si perviene ad un sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine in cui, se le matrici dei guadagni sono diagonali, le coordinate sono tra loro disaccoppiate

$$(\ddot{S}_0 - \ddot{S}) + K_v (\dot{S}_0 - \dot{S}) + K_p (S_0 - S) = 0$$

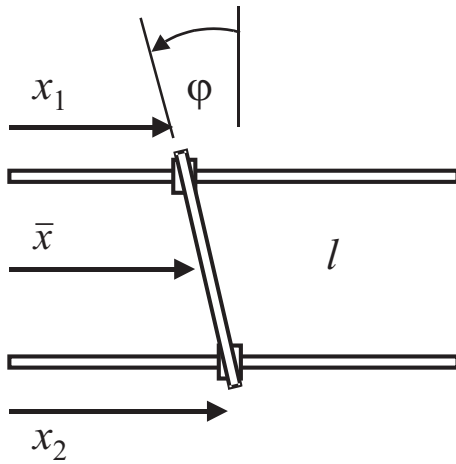


Figura H.49: Sistema a 2 g.d.l. per la movimentazione di un'asta.

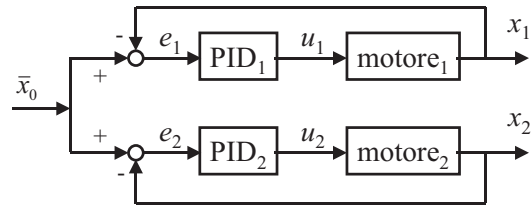


Figura H.50: Controllo decentralizzato a un grado di libertà.

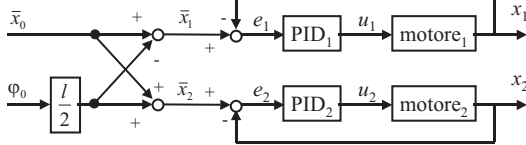


Figura H.51: Controllo decentralizzato a due gradi di libertà.

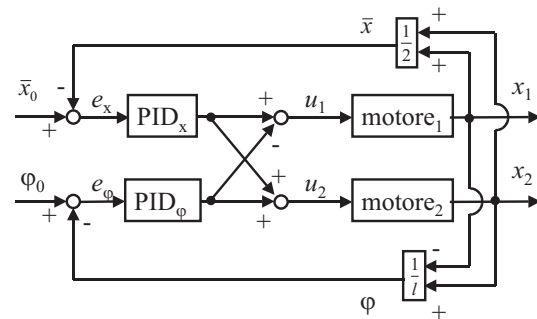


Figura H.52: Controllo centralizzato a due gradi di libertà (assi virtuali).

**Assi virtuali** Si consideri un sistema di movimentazione che deve movimentare un'asta. Possono verificarsi due casi. Nel primo caso l'asta deve semplicemente traslare e non ruotare ( $\varphi = 0$ ), ma essendo molto sottile è necessario utilizzare due motori che si devono muovere in maniera sincrona per evitare che essa si infletta.

Alternativamente può essere necessario spostare e ruotare l'asta ottenendo quindi un sistema a due gradi di libertà.

Nel primo caso è possibile utilizzare due motori retroazionati in posizione i quali ricevono lo stesso segnale di posizione desiderata  $x_0$ . Si ottiene un sistema decentralizzato ad assi indipendenti.

Qualora si intenda anche regolare l'orientamento dell'asta un primo schema risolutivo prevede di calcolare il set point di posizione di ogni motore  $\bar{x}_i$  a partire dal valore desiderato di posizione  $x_0$  ed orientamento  $\varphi_0$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \frac{l}{2}\bar{\varphi}_0 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_0 + \frac{l}{2}\bar{\varphi}_0 \end{cases}$$

I due motori sono poi controllati in maniera indipendente. Si ottiene così uno schema di controllo decentralizzato a 2 gradi di libertà.

Alternativamente si può decidere di controllare direttamente la posizione e l'orientamento dell'asta. Si procede quindi al calcolo della sua posizione ed orientamento

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \\ \bar{\varphi} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{l} \end{cases}$$

questi valori vengono confrontati con quelli desiderati, gli errori di inseguimento vengono processati da dei blocchi PID e le azioni dei due regolatori vengono ricombinate per essere inviate ai due motori. Gli anelli di retroazione dei due gradi di libertà interagiscono tra di loro: siamo in presenza di un controllore centralizzato a due gradi di libertà.

In pratica regoliamo due grandezze  $\bar{x}$  e  $\bar{\varphi}$  alle quali non corrisponde direttamente un attuatore;  $\bar{x}$  e  $\bar{\varphi}$  sono talvolta detti *assi virtuali*.

Questo schema può anche essere considerato un controllo nello spazio operativo in cui  $S = [\bar{x} \ \bar{\varphi}]^T$  e  $Q = [x_1 \ x_2]^T$ ; questo sarebbe particolarmente interessante qualora  $S$  fosse misurabile direttamente permettendo così di ottenere precisioni di controllo elevate.

Si osservi che nel caso decentralizzato i PID dei due assi saranno presumibilmente tarati in maniera identica, mentre nel caso centralizzato i due PID devono controllare grandezze diverse con diverse inerzie equivalenti e quindi andranno tarati in maniera differente.

Inoltre il caso centralizzato, a fronte di una maggiore complessità, permette di gestire meglio alcune situazioni. Immaginiamo per esempio che l'inclinazione debba essere garantita in maniera precisa mentre la regolazione di posizione possa essere regolata in maniera più grossolana. In questo caso i parametri del PID di posizione potranno avere guadagni inferiori rispetto a quelli di orientamento. Così, se ad esempio, uno dei motori dovesse incontrare una coppia resistente molto alta ed imprevista, si otterrebbe un rallentamento anche dell'altro motore mentre rimarrebbe sempre garantita la corretta inclinazione. Viceversa se si fosse impiegato uno schema decentralizzato uno dei due motori avrebbe rallentato molto più dell'altro producendo un'elevato errore di inclinazione.

La necessità di garantire una corretta inclinazione anche in presenza di disturbi asimmetrici potrebbe giustificare l'uso del sistema centralizzato anche nel caso ad un grado di libertà ove si porrebbe sempre  $\varphi_0 = 0$ , cioè inclinazione desiderata nulla.

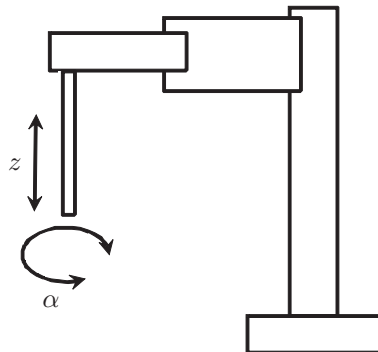


Figura H.53: Schema semplificato di robot SCARA con azionamento cilindrico dell'end-effector.

## H.17 Giunto cilindrico attuato

In alcuni manipolatori è presente un giunto cilindrico motorizzato in entrambi i gradi di libertà. Ciò può avvenire, per esempio, in un robot SCARA (fig. H.16) ove i due gradi di libertà servono per conferire il moto verticale della pinza nonché la rotazione attorno al proprio asse. L'attuazione può avvenire grazie a due motori rotativi montati all'interno dell'ultimo link del robot. In alternativa i motori possono essere posizionati nel piantone "a terra" ed il loro moto trasmesso ove necessario tramite due cinghie.

Il moto cilindrico viene generato tramite un dispositivo meccanico simile alle viti a ricircolo di sfere, ma con due gradi di libertà (fig. H.54). Il dispositivo comprende un nocciolo con due scanalature di cui una longitudinale (detta spline) ed una elicoidale (detta screw). Sono inoltre presenti due madreviti a ricircolo di sfere ciascuna delle quali si accoppia con una delle due scanalature. Chiamiamo  $x$  e  $\alpha$  le coordinate che indicano il movimento traslatorio e rotatorio del nocciolo, e con  $x_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $x_2$ ,  $\alpha_2$  quello delle due madreviti;  $p$  è il passo della vite. Per semplicità di rappresentazione, nelle figure H.54(a) e H.54(b) le due scanalature e viti sono indicate separate, ma nella realtà esse sono contemporaneamente presenti (H.54(c)).

Ciascuno dei due accoppiamenti produce un vincolo che lega il movimento del nocciolo a quello delle due

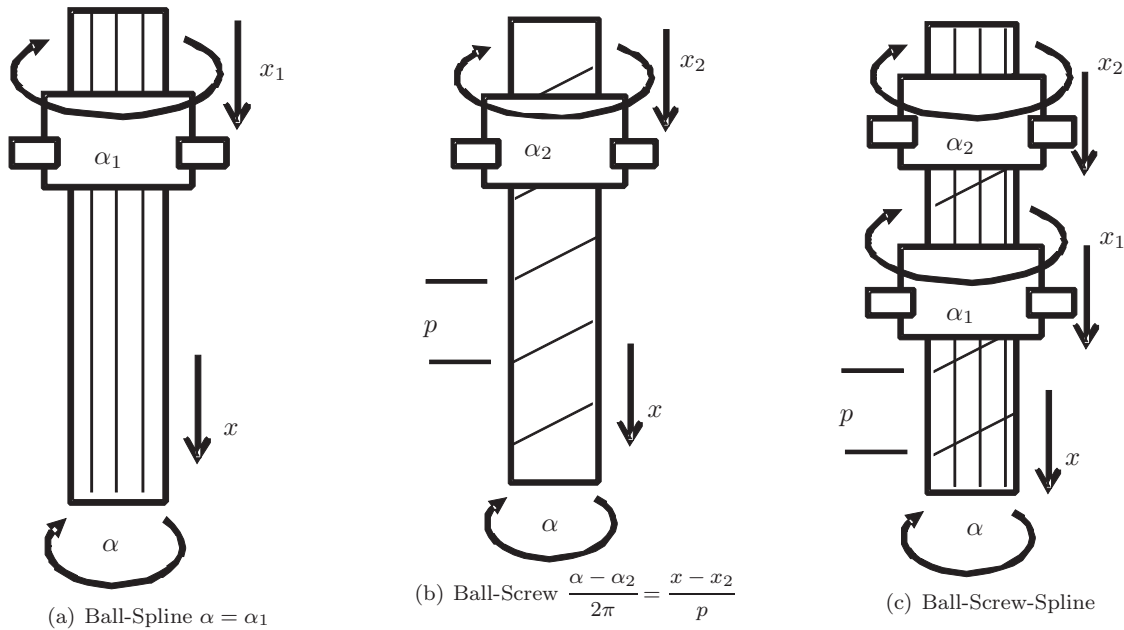


Figura H.54: Dispositivo con vite (screw) a spline a ricircolo di sfere per la movimentazione di un'accoppiamento cilindrico (2 gradi di libertà).

madreviti:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 \\ \frac{\alpha - \alpha_2}{2\pi} = \frac{x - x_2}{p} \end{cases} \quad (H.23)$$

che opportunamente riscritte portano a risolvere tanto la cinematica diretta che inversa:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 \\ x = p \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2\pi} + x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = \alpha + 2\pi \frac{x_2 - x}{p} \end{cases} \quad (H.24)$$

Considerato che normalmente il movimento di traslazione delle due madreviti è bloccato  $x_1 = x_2 = 0$  e che esse possono solo ruotare, si ottiene

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 \\ x = p \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2\pi} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = \alpha - 2\pi \frac{x}{p} \end{cases} \quad (H.25)$$

Quindi una pura rotazione si ottiene per  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ , e una pura traslazione si ottiene per  $\alpha_1 = 0$  e quindi  $x = -p\alpha_2/(2\pi)$ .

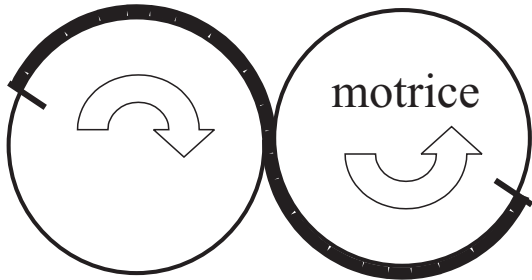
### H.18 Trasmissioni a cavi §12.3.2 pag.332

La figura H.55 rappresenta l'uso di cavi per la trasmissione di moto tra pulegge ad assi paralleli o ortogonali. Questo tipo di trasmissioni simula l'accoppiamento tra ingranaggi (fig. H.55(b)), ma permette di eliminare giochi ed attriti. Per evitare slittamenti le estremità dei cavetti sono resi solidali alle pulegge. Dato che i cavi possono trasmettere forze di trazione, ma non di compressione l'utilizzo di un solo cavo (fig. H.55(a)) permette la trasmissione della coppia in un solo verso. Dato che le trasmissioni sono usualmente bidirezionali occorre montare i cavetti in coppia (fig. H.55(c)); nella figura uno dei cavetti della coppia è rappresentato tratteggiato. E' anche possibile realizzare rapporti di trasmissione non unitari impiegando ruote di diametro differente (fig. H.55(d)).

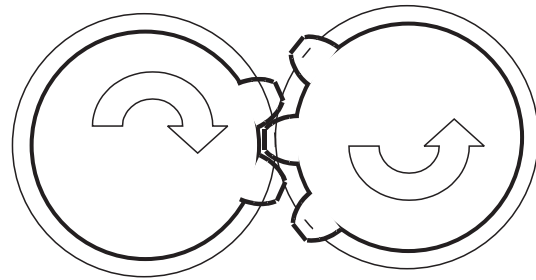
E' possibile realizzare anche trasmissioni tra albero ad assi concorrenti anche tra più alberi coassiali (fig. H.55(e)).

### H.19 Polso e trasmissioni ad alberi cavi (pag. 339, figura 12.14)

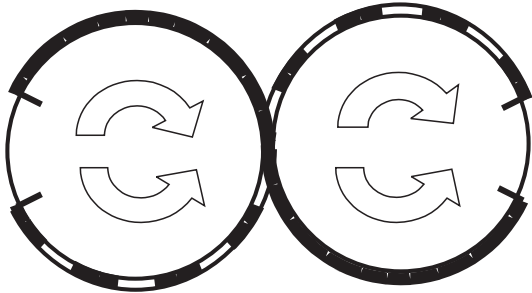
Una foto della trasmissione del moto nel polso del robot DOGHI è riportata in figura H.56.



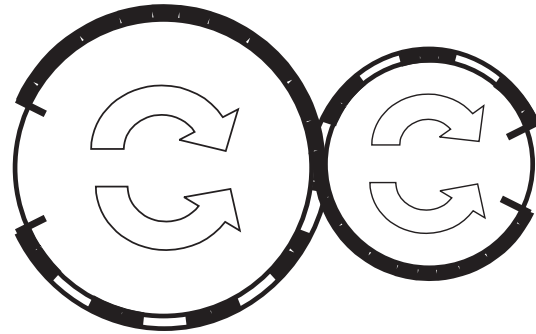
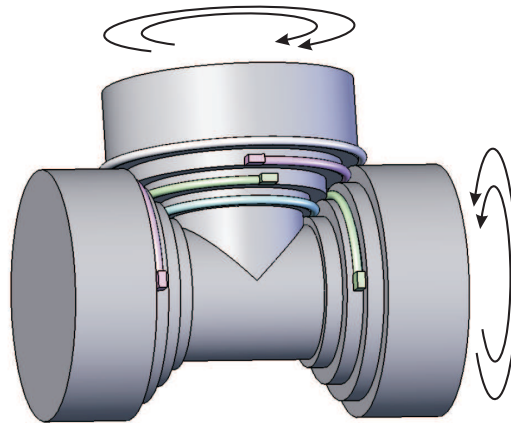
(a) trasmissione monodirezionale a cavi tra due pulegge



(b) ingranaggi equivalenti



(c) trasmissione bidirezionale a cavi tra due pulegge

(d) trasmissione bidirezionale con  $\tau \neq 1$ 

(e) trasmissioni ad assi ortogonali e alberi coassiali

Figura H.55: Trasmissioni a cavi tra pulegge ad assi paralleli o concorrenti.



Figura H.56: Il polso del robot DOGHI con trasmissione ad alberi cavi, ingranaggio conici a denti elicoidali.

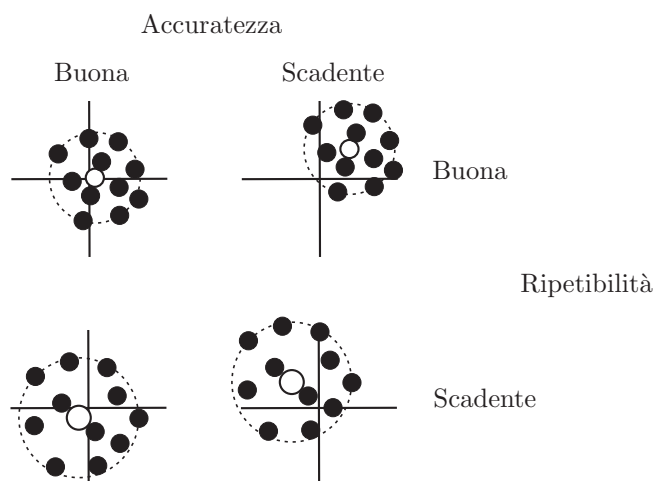


Figura H.57: Significato di ripetibilità (errori casuali) ed accuratezza (errori ripetitivi) di un manipolatore. Gli errori ripetitivi possono essere compensati tramite calibrazione.

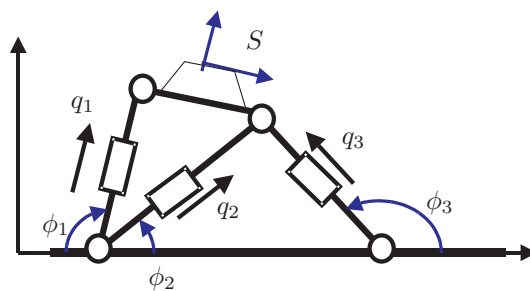


Figura H.58: Calibrazione di una PKM: per migliorare le prestazioni, in aggiunta alle misure di errore di posa, si possono utilizzare anche le misure dei movimenti dei giunti non motorizzati  $\phi_i$ .



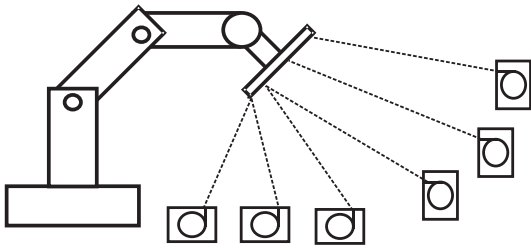


Figura H.59: Sistema di misura economico di posa di un manipolatore tramite 6 rocchetti strumentati. La posa del manipolatore può essere stimata conoscendo la lunghezza dei sei fili e la posizione dei rocchetti.

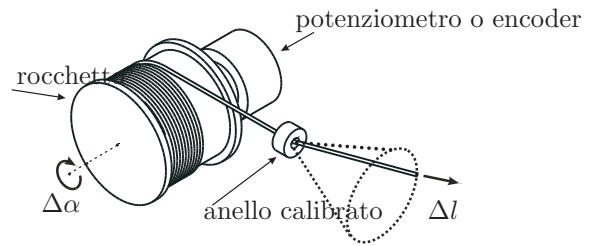
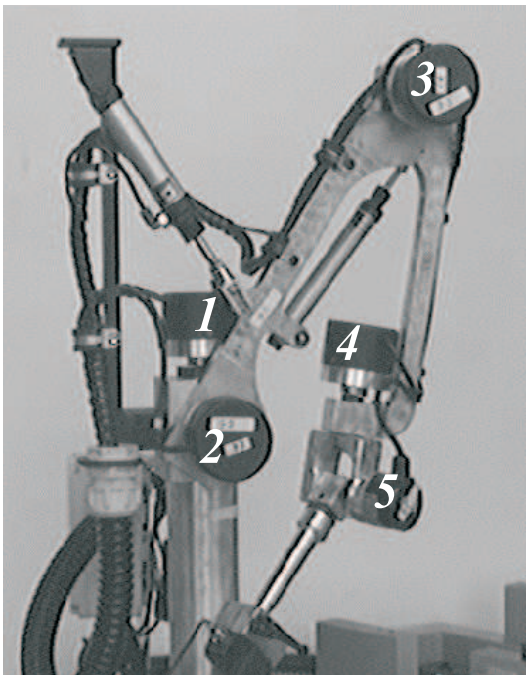
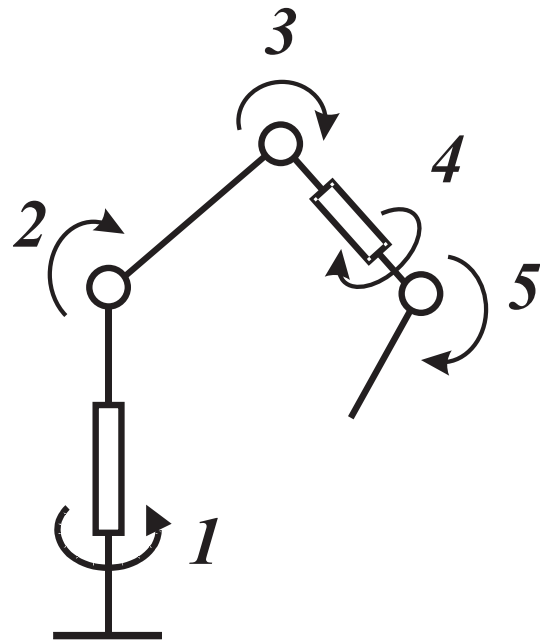


Figura H.60: Rocchetto strumentato che misura la quantità di filo estratto  $\Delta l = r\Delta\alpha$ .



(a) Braccio di misura



(b) struttura cinematica

Figura H.61: Braccio seriale di misura a 5 gradi di libertà.

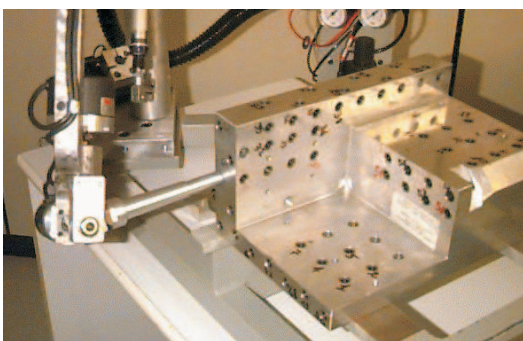


Figura H.62: Dima per forzare il manipolatore ad una posa nota; qui è utilizzato per forzare la posa del braccio di figura H.61(a).

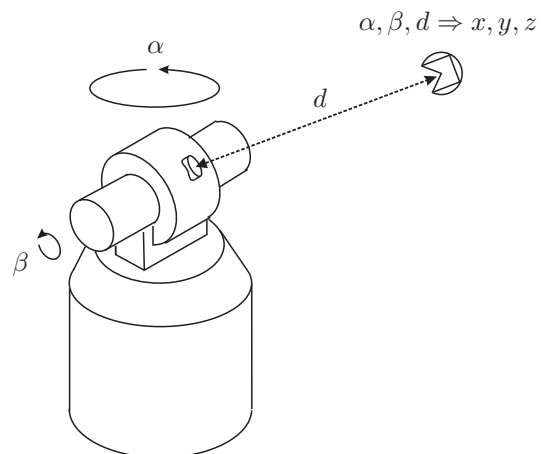


Figura H.63: Il *laser tracker* consente di misurare la posizione assoluta del centro di uno speciale specchio (*corner cube*).

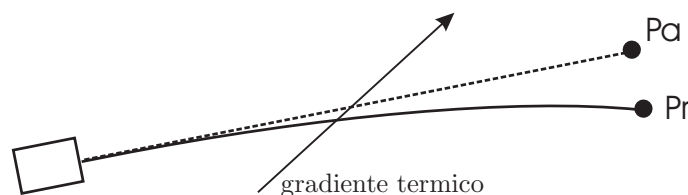


Figura H.64: A causa di un gradiente termico il raggio laser viene deviato. Il *laser tracker* crede che lo specchio si trovi in  $P_a$  (posizione apparente) mentre in realtà esso si trova in  $P_r$  (posizione reale).

## H.20 Calibrazione (§14.1 Pag. 403 e seguenti)

### H.20.1 Concetti generali

La figura H.57 richiama i concetti di ripetibilità ed accuratezza di un manipolatore (vedi anche capitoli relativi alle misura delle prestazioni §17).

La calibrazione di un manipolatore richiede una strumentazione in grado di misurare la posa reale raggiunta da un manipolatore per calcolare poi l'errore per differenza tra posa reale e teorica. La misura assoluta di posa è molto complessa e richiede strumentazione complessa e costosa. A puro esempio indicativo in figura H.59 viene schematizzato un sistema di misura economico di posa di un manipolatore tramite 6 rocchetti strumentati (figura H.60). La posa del manipolatore può essere stimata conoscendo la posizione dei rocchetti, la lunghezza dei sei fili e utilizzando equazioni simili a quelle per la cinematica diretta di manipolatori paralleli (vedi §8.15).

Quando non è conveniente misurare la posa effettivamente raggiunta da un manipolatore si può usare un metodo "duale" che prevede di forzare la posa a valori predefiniti (esempio figura H.62). Poi si stima la posa tramite la cinematica diretta utilizzando come "movimento motori"  $Q$  la lettura dei trasduttori dei giunti. La differenza tra posa imposta e posa stimata serve ad innescare il procedimento di calibrazione. La figura H.63 rappresenta un *laser tracker* ovvero una strumentazione laser per la misura della posizione di uno speciale specchio di tipo *corner cube* da porsi sul dispositivo d'estremità del robot. La sorgente laser può venire diretta in ogni direzione ruotando due specchi (interni allo strumento). Se il raggio laser incontra lo speciale specchio esso viene riflesso verso la sorgente. Opportuni sensori sono in grado di misurare la distanza  $d$  tra strumento e specchio. Per la misura di distanze esistono metodologie interferometriche di tipo incrementali molto precise che consentono di arrivare a precisioni di alcuni micron, mentre metodologie di tipo assoluto arrivano a frazioni di decimo di millimetro. La conoscenza delle rotazioni  $\alpha$  e  $\beta$  degli specchi e della distanza  $d$  permette di determinare le coordinate  $x, y, z$  dello specchio. Appositi sensori misurano la temperatura ambiente per compensare gli effetti sulla strumentazione, tuttavia se la temperatura ambientale varia lungo il percorso del raggio laser, esso non viaggia più in linea retta e la strumentazione viene ingannata (figura H.64); occorre quindi effettuare le misure in un ambiente adeguato. Per misurare l'orientamento del dispositivo di estremità è necessario misurare la posizione di almeno tre diversi punti (specchi) posti sul dispositivo d'estremità.

---

La figura H.58 si riferisce a una possibile tecnica calibrazione di un manipolatore a struttura cinematica parallela (PKM Parallel Kinematic Machine).

### H.20.2 Calibrazione non parametrica (§14.1.5 pag.407)

La calibrazione parametrica prevede che l'errore di posa di un manipolatore venga misurato in punti appartenenti ad una griglia regolare (es. figura H.66). Normalmente l'errore varierà gradualmente da una posa all'altra e questo consentirà di prevedere l'errore per ogni posa intermedia tramite interpolazione dai valori adiacenti nella griglia.

Conoscendo l'errore di posa sarà possibile compensarlo producendo uno spostamento uguale e contrario. Tuttavia questo metodo non consente di capire quale sia la fonte dell'errore e quindi la calibrazione può essere applicata solo nei punti interni alla griglia mentre non si è in grado di calibrare il manipolatore quando si trova fuori da essa. Inoltre se il robot deve essere calibrato per orientamento qualsiasi della pinza, per ogni punto della griglia è necessario misurare l'errore di posa per parecchi orientamenti del dispositivo d'estremità. Questa operazione può essere molto complessa e richiedere parecchi tempo tuttavia si è sgravati dall'onere di sviluppare un modello sofisticato del manipolatore.

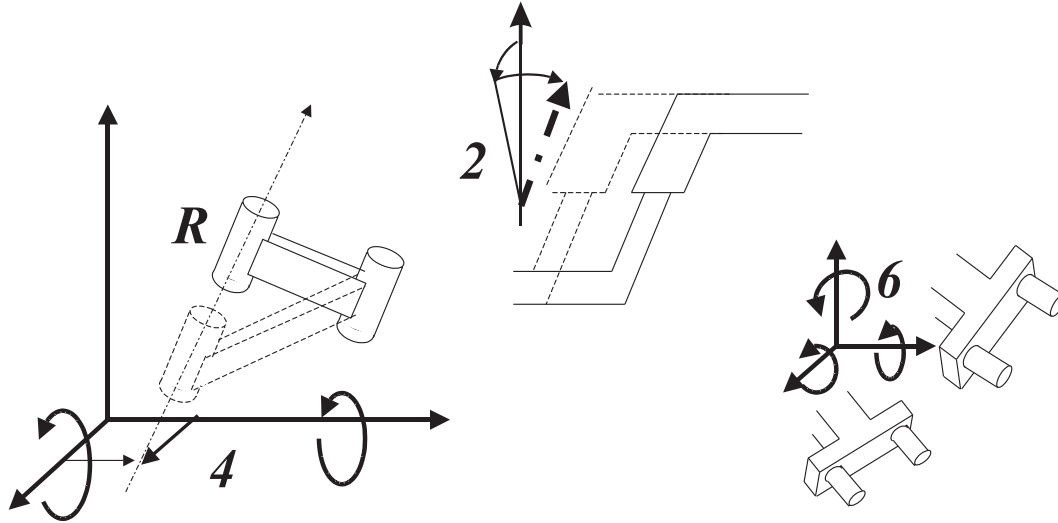


Figura H.65: Interpretazione geometrica della scelta dei parametri di calibrazione: un modello completo, minimo, proporzionale.

### H.21 Calibrazione: scelta dei parametri: un modello completo, minimo, proporzionale (§14.1.14 pag.416)

La natura dei parametri strutturali considerata in questo approccio è descritta dalla figura H.65.

### H.22 Modello dinamico con elasticità concentrate (pag. 425 §14.2.4, §2.9 pag. 56 e §2.8.1 pag. 49)

Le equazioni del modello dinamico con elasticità concentrata si possono ottenere sostituendo nell'equazione della dinamica  $F_q = \overline{\mathcal{M}}\ddot{Q} + \mathcal{V}(Q, \dot{Q}) + \mathcal{G}_1(Q, F)$  il valore delle forze trasmesse dalla elasticità delle trasmissioni. Risulta

$$K_q(Q_m - Q) + K_r(\dot{Q}_m - \dot{Q}) = \overline{\mathcal{M}}\ddot{Q} + \mathcal{V}(Q, \dot{Q}) + \mathcal{G}_1(Q, F)$$

ove  $Q_m$  rappresenta le rotazioni dei motori “equivalenti” (uscita riduttori supposti rigidi) e  $Q$  le rotazioni dei link; le matrici diagonali  $K_q$  e  $K_r$  indicano la rigidezza e le perdite di deformazione viscosa delle trasmissioni

$$K_q = \text{diag}(k_1, k_2, \dots) \quad K_r = \text{diag}(r_1, r_2, \dots)$$

nell'esempio del manipolatore SCARA si ottiene

$$Q_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad K_q = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad K_r = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

Definiamo con  $\Delta Q$  la differenza tra movimento dei motori e dei link e con  $\Delta S$  la differenza tra posizione teorica dell'organo terminale nel caso teorico rigido e quella del caso reale con elasticità

$$\Delta Q = (Q_m - Q) \quad \Delta S = (S_m - S)$$

Si può operare un cambio di coordinate dallo spazio dei giunti in quello di lavoro ponendo  $\Delta S = J\Delta Q$  ottenendo

$$\mathcal{M}_s \Delta \ddot{S} + K_{rs} \Delta \dot{S} + K_s \Delta S = J^{-T} (\overline{\mathcal{M}}\ddot{Q} + \mathcal{V}(Q, \dot{Q}) + \mathcal{G}_1(Q, F))$$

con

$$\mathcal{M}_s = J^{-T} \overline{\mathcal{M}} J^{-1} \quad K_{rs} = J^{-T} K_r J^{-1} \quad K_s = J^{-T} K_q J^{-1}$$

Le equazioni scritte sono quelle tipiche di sistemi vibranti forzati. In questo caso la forzante è il movimento dei motori e l'integrazione della equazione consente di determinare il movimento del manipolatore reale. Nel caso che i termini quadratici in  $\dot{Q}$  siano trascurabili e nell'ipotesi di piccole deformazioni si ottiene un'equazione differenziale lineare; i modi principali di vibrare si possono dedurre dagli autovettori di  $\mathcal{M}_s^{-1} K_s$  o di  $\overline{\mathcal{M}}^{-1} K_q$  mentre le pulsazioni proprie si deducono dai corrispondenti autovalori.

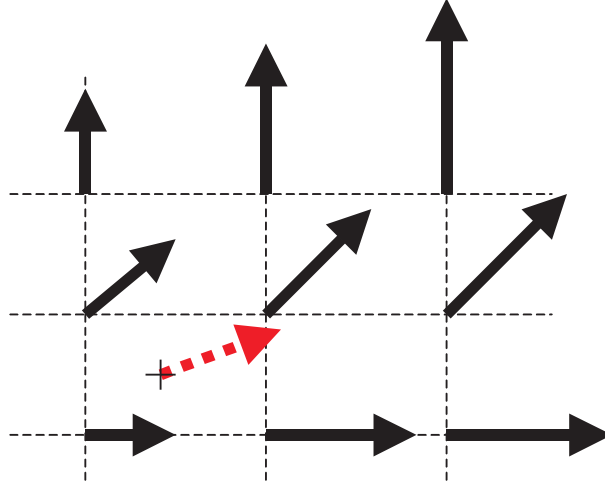


Figura H.66: Griglia di calibrazione (non parametrica). L'errore di posa  $\Delta S$  viene misurato su una griglia regolare di punti. Quando è richiesto di raggiungere una posa  $S$ , in realtà il manipolatore raggiungerà la posa  $S + \Delta S$ . L'errore di posa può venire annullato chiedendo al robot di raggiungere la posa  $S - \Delta S$ . Per i punti per i quali non è disponibile un valore di errore di posa questo valore si stima per interpolazione dai punti adiacenti.

## H.23 Stima Parametri del modello dinamico (pag. 427 §14.2.7, §2.9 pag. 56, §2.21 pag. 70 e pag. 50 §2.8.3)

**Nota** La funzione *segno* dovrebbe essere indicata come  $\text{sgn}()$  ma altre volte compare erroneamente come  $\text{sign}()$ ; essa è definita al §B.3.1 come  $\text{sgn}(x) = 1$  se  $x > 0$ ,  $0$  se  $x = 0$ ,  $-1$  se  $x < 0$ .

Consideriamo il modello a parametri dinamici minimi

$$C = B\tilde{P} \quad \tilde{P} = [P_d^T \ P_a^T]^T$$

La simbologia usata nei due capitoli non è omogenea. Inoltre nel paragrafo sulla calibrazione dinamica non sono stati esplicitati la massa  $m$  ed il momento d'inerzia  $J$  del corpo trasportato mentre sono stati introdotti i momenti d'inerzia dei motori e i rapporti di riduzione  $\tau_1$  e  $\tau_2$ . Le varie equazioni non sono così direttamente confrontabili. Ciò non influenza la validità dei risultati sperimentali descritti perché, come dichiarato, non ci interessa (ne è completamente possibile) trovare il valore dei singoli parametri, ma solo quello di "parametri globali" equivalenti in un modello rigido a parametri dinamici minimi.

Inoltre per omogeneità conviene eliminare il coefficiente  $l_1$  dalla matrice  $B$  ed inglobarlo nel vettore dei termini dinamici.

E' quindi possibile rifinire il vettore dei parametri  $P$  e la matrice  $B$  nella seguente maniera:

$$P_d = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1z} + (m + m_2)l_1^2 + J_{m1}/\tau_1^2 \\ l_1(ml_2 + m_2s_x) \\ l_1m_2s_y \\ I_{2z} \\ J_{m2}/\tau_2^2 \end{bmatrix} \quad P_a = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{02} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{H.26})$$

$$B^T = \begin{bmatrix} \tau_1\ddot{q}_1 & 0 \\ \tau_1(c_2(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - s_2\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)) & \tau_2(c_2\ddot{q}_1 + s_2\dot{q}_1^2) \\ \tau_1(-s_2(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - c_2\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)) & \tau_2(-s_2\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_1^2) \\ \tau_1(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) & \tau_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ 0 & \tau_2\ddot{q}_2 \\ \hline \text{sgn}(\dot{q}_1) & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 \\ \text{sgn}(\dot{q}_1)\dot{q}_1^2 & 0 \\ \hline 0 & \text{sgn}(\dot{q}_2) \\ 0 & \dot{q}_2 \\ 0 & \text{sgn}(\dot{q}_2)\dot{q}_2^2 \end{bmatrix}$$

I tre blocchi evidenziati nella matrice  $B^T$  evidenziano la parte relativa alle masse (azioni d'inerzia) e quelle relative alle perdite nei due riduttori.

Per comparare le equazioni del §14 con quelle del §2 occorre osservare che quest'ultime non tengono conto delle trasmissioni per cui è necessario considerare le seguenti eguaglianze

$$J_{m1} = 0 \quad J_{m2} = 0 \quad \tau_1 = 1 \quad \tau_2 = 1$$

infine la corrispondenza tra simbologie si completa osservando che vale

$$I_{1z} = J_{g1} + m_1 l_1^2 \quad I_{2z} = J_{g2} + J + m_2 g_2^2 + m l_2^2 \quad s_x = g_2 \quad s_y = 0$$

$s_y$  è nullo perché si assume che il baricentro stia sulla mezzeria del link.

Avendo spostato il coefficiente  $l_1 = 0.33$  dalla matrice  $B$  al vettore  $P$  occorre moltiplicare i parametri  $p_2$  e  $p_3$  per questo stesso valore ed aggiornare la sua unità di misura. Nell'esempio sperimentale citato il parametro  $p_3$  vale esattamente zero perché la stima è stata fatta con riferimento ad un modello ridotto che assume  $s_y = 0$ .

Risulta

	cerchio	OJD	
$P_1$	16.3286514074	16.2606169659	$kgm^2$
$P_2$	-0.0550159053	0.837423654	$kgm^2$
$P_3$	0.0	0.0	$kgm^2$
$P_4$	-0.3813491029	0.6642731627	$kgm^2$
$P_5$	4.8753219665	4.2045177593	$kgm^2$
$a_{01}$	0.1846270328	0.2100604969	$Nm$
$a_{11}$	0.2945835590	0.0940617391	$Nm/(rad/s)$
$a_{21}$	-0.1448462244	-0.0168580957	$Nm/(rad/s)^2$
$a_{02}$	0.0841700456	0.0876724328	$Nm$
$a_{12}$	0.0251936773	0.0508717965	$Nm/(rad/s)$
$a_{22}$	0.0009255059	-0.0073197797	$Nm/(rad/s)^2$

Si osservi che il parametro  $p_5$  non è nullo evidenziando l'importanza del riduttore sull'inerzia vista dal motore. A questo riguardo si richiamano i discorsi fatti al §12.6. Per comparare i valori numerici del §12.6 con quelli del §14.2 si osservi che in un caso l'inerzia è valutata prima del riduttore, nell'altra dopo. Inoltre si ricorda che nel caso in esame  $\tau = 1/100$  da cui  $\tau^2 = 10^{-4}$ .

# Appendice I

## Ellissi: proprietà e rappresentazioni

In questo paragrafo trattiamo alcuni argomenti relativi ad ellissi in un piano  $xy$ , ma tutti i risultati generali basati sui concetti di autovalori ed autovettori sono validi anche per ellissoidi nello spazio  $xyz$  (o a più dimensioni), anche se alcune formule particolari vanno ovviamente adattate.

Un'ellisse con diametri paralleli agli assi coordinati  $x, y$  e con centro nell'origine può essere espressa in forma canonica come

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = 1$$

ove  $r_1$  e  $r_2$  sono i raggi (semidiametri) dell'ellisse stessa. La stessa ellisse può essere espressa in forma matriciale come

$$\boxed{v^T A v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1} \quad v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2^2} \end{bmatrix}$$

ed in forma parametrica come

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos(\alpha) \\ r_2 \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

L'area dell'ellisse è

$$a = \pi r_1 r_2$$

Ruotando l'ellisse di un angolo  $\alpha_0$ , l'area e la lunghezza dei semidiametri non cambiano. Le equazioni che rappresentano l'ellisse ruotata possono essere ricavate dalla relazione che esprime le coordinate ruotate  $x', y'$  in funzione di quelle originali  $x, y$

$$v' = Rv \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_0) & -\sin(\alpha_0) \\ \sin(\alpha_0) & \cos(\alpha_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

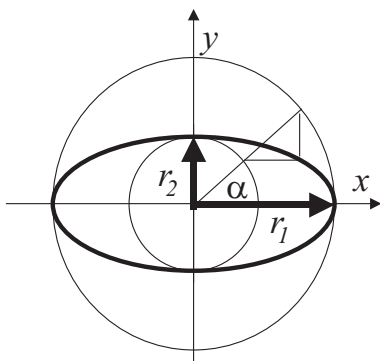


Figura I.1: Costruzione di un'ellisse ispirata alla sua definizione tramite equazione parametrica.

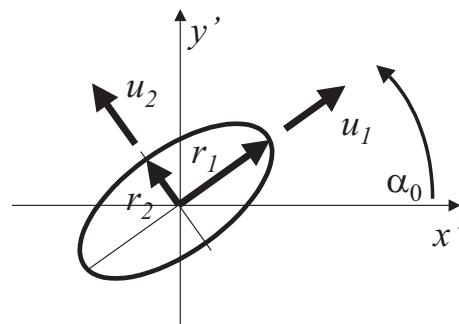


Figura I.2: Ellisse ruotata di un angolo  $\alpha_0$ .

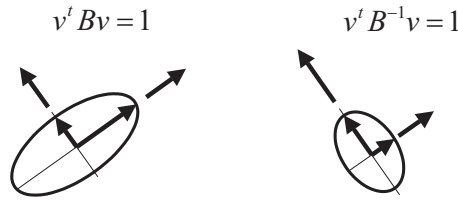


Figura I.3: Ellissi associate ad una matrice  $B$  ed alla sua inversa  $B^{-1}$ .

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_0) & -\sin(\alpha_0) \\ \sin(\alpha_0) & \cos(\alpha_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \cos(\alpha) \\ r_2 \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

ove le colonne della matrice ortogonale “di rotazione”  $R$  possono essere interpretate come i versori degli assi originali  $x, y$  (su cui giacciono i diametri) visti da  $x', y'$

$$R = \left[ \begin{array}{c|c} \cos(\alpha_0) & -\sin(\alpha_0) \\ \sin(\alpha_0) & \cos(\alpha_0) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} u_1 & u_2 \end{array} \right] \quad R^T = R^{-1}$$

ricordando la relazione inversa  $v = R^T v'$ , l'ellisse può essere riscritta come

$$1 = v^T A v = v'^T (R A R^T) v' = v'^T A' v' = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} u_1 & u_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_1^T}{u_2^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

con

$$A' = (R A R^T) = \left[ \begin{array}{c|c} u_1 & u_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_1^T}{u_2^T} \end{bmatrix}$$

ove  $u_i$  sono gli autovettori di  $A'$  ed i corrispondenti autovalori sono  $\lambda_i = 1/r_i^2$ .

Si deduce quindi che data un'ellisse (o un'ellissoide) nella forma  $v^T A'' v = 1$ , gli autovettori  $u_i$  della matrice  $A''$  rappresentano le direzioni dei suoi assi, mentre l'inverso della radice quadrata dei corrispondenti autovalori  $\lambda_i$  rappresentano i corrispondenti semidiametri  $r_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ .

Inoltre dato che il determinante di una matrice è pari al prodotto degli autovalori, si deduce che l'area dell'ellisse è proporzionale all'inverso della radice quadrata del suo determinante

$$a = \pi r_1 r_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det(A'')}}$$

Talvolta la matrice  $A''$  (che risulta simmetrica e definita positiva) è ottenuta dal prodotto di una matrice  $B$  per la sua trasposta:  $A'' = B^T B$ . In questo caso si definiscono *valori singolari*  $\sigma_i$  di  $B$  la radice quadrata degli autovalori di  $A''$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \det(A'') = \det(B)^2$$

per cui si può affermare che i semidiametri sono l'inverso dei valori singolari di  $B$ , l'area dell'ellisse è inversamente proporzionale al determinante di  $B$ . La matrice  $A''$  è chiaramente definita positiva. Si ottiene

$$\sigma_i = \frac{1}{r_i} \quad a = \pi r_1 r_2 = \frac{\pi}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\pi}{\det(B)}$$

Comparando una matrice  $B$  con la sua inversa  $B^{-1}$  si osserva che i loro determinanti (come pure i loro autovalori) sono uno l'inverso dell'altro mentre gli autovettori coincidono

$$\det(B) = \frac{1}{\det(B^{-1})} \quad \lambda_i(B) = \frac{1}{\lambda_i(B^{-1})} \quad u_i(B) = u_i(B^{-1})$$

quindi l'asse maggiore e quello minore delle ellissi si scambiano di posto ed ad un'ellisse di area "piccola" (minore di 1) corrisponde una di area "grande" (maggiore di 1) o viceversa.

Nel caso di ellissoidi nello spazio  $xyz$  in luogo di area occorre parlare di volume calcolabile dal prodotto dei tre semidiametri  $Vol = 4/3\pi r_1 r_2 r_3$ .

In generale si può verificare che un'ellisse con generico orientamento e centro nell'origine degli assi può essere scritta come

$$ax^2 + bxy + cy^2 = [x \ y] \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v^T A v = 1$$

con  $a, c > 0$  e  $\det A > 0$ .

### **Dimetro in una direzione.**

Consideriamo un ellisse associata alla matrice  $A$ . Il diametro in una direzione  $u$  si può facilmente determinare rappresentandolo con un vettore  $v$  di modulo  $d$  moltiplicato per il versore associato alla direzione ( $v = ud$ ), l'ellisse è così definita come

$$d^T u^T A u d = 1$$

da cui

$$d = \frac{1}{\sqrt{u^T A u}}$$





## Appendice J

# Appendice richiami matematici - proprietà matrici

### J.1 rango

Alcune proprietà del rango di una matrice generica  $A$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) = \text{rank}(AA^T) = \text{rank}(A^T A)$$

### J.2 proiezione

proiezione  $x'$  di un vettore  $x$  sullo spazio definito dalle colonne di  $A$

$$x' = Px \quad \text{con} \quad P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

valida se  $(A^T A)$  risulta invertibile.

Il residuo  $x_r$  (cioè la parte ortogonale allo spazio) risulta

$$x_r = x - Px = Bx \quad \text{con} \quad B = \left( I - A(A^T A)^{-1} A^T \right)$$

ove  $I$  è la matrice identità; risulta ovviamente  $x = x' + x_r$ .  $B$  e  $P$  sono matrici *proiezione*; tutte le matrici proiezione sono singolari tranne la matrice identità.

Per dimostrare la relazione per il calcolo della matrice  $P$ , si possono considerare le proprietà della matrice pseudo inversa (vedi appendice C)  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$

### J.3 derivate di funzioni lineari e quadratiche

Siano  $c$  e  $x$  delle matrici colonna ed  $A$  una matrice quadrata. Valgono le seguenti proprietà

$$\frac{\partial c^T x}{\partial x} = \frac{\partial x^T c}{\partial x} = c \quad \frac{\partial Ax}{\partial x} = A^T \quad \frac{\partial x^T Ax}{\partial x} = (A + A^T)$$



## Appendice K

# Pentalatero (§8, pag.213) - Manipolatore parallelo a 2 gradi di libertà

Esistono più versioni del meccanismo denominato pentalatero. In questa sede si esamina la versione classica azionata da motori rotativi (fig. K.1, K.4) e quella azionata da motori lineari (fig. K.5). Si tratta di manipolatori piani a due gradi di libertà destinati a posizionare un utensile nel piano  $xy$  (polso del robot) tramite due braccia motorizzate. A scopo propedeutico è preliminarmente studiato l'arco a tre cerniere ed un manipolatore che si può ottenere facendo variare la lunghezza delle sue aste (fig. K.2).

Una realizzazione commerciale del pentalatero classico è raffigurata in fig. K.1.

### K.1 L'arco a 3 cerniere

In figura K.2 è rappresentato un arco a tre cerniere. Indichiamo con  $x_a, y_a$  e  $x_b, y_b$  le coordinate delle cerniere a terra e con  $x, y$  quelle della cerniera mobile; le lunghezze delle due aste sono  $\rho_a$  e  $\rho_b$ .

Questa struttura può essere utilizzata per generare meccanismi a uno o due gradi di libertà. Ciò può avvenire facendo variare la lunghezza di una, o entrambe le aste, oppure movimentando una o entrambe cerniere a terra. Al §K.2 viene descritto come realizzare un pentalatero classico facendo muovere le cerniere su traiettorie circolari, mentre al §K.3 viene descritto il caso di cerniere mobili su guide lineari. In questa sezione studiamo invece il caso in cui la cerniera mobile venga azionata facendo variare le lunghezze delle due aste tramite azionamenti lineari (o pistoni). In questo caso le coordinate nello spazio dei giunti  $Q$  e nello spazio di lavoro  $S$  saranno

$$Q = \begin{bmatrix} \rho_a \\ \rho_b \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{K.1})$$

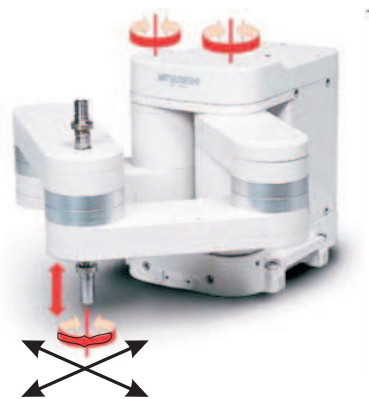


Figura K.1: Un pentalatero commerciale RP Mitsubishi a 4 gradi di libertà; apposite trasmissioni nascoste all'interno dei bracci permettono la rotazione del polso attorno al suo asse ed una movimentazione in direzione verticale.

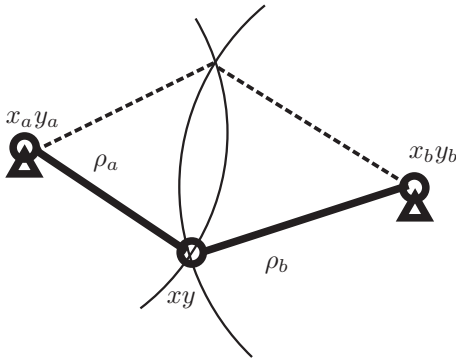


Figura K.2: L'arco a tre cerniere: la base cinematica del pentalatero.

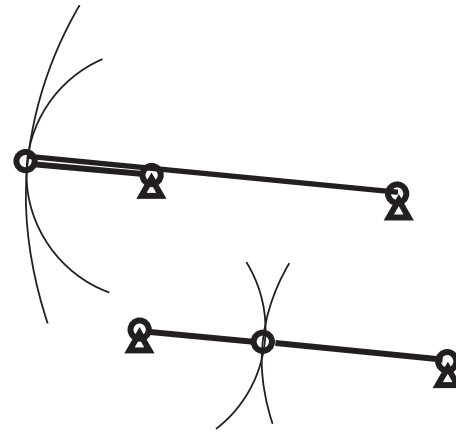


Figura K.3: Configurazioni singolari dell'arco a 3 cerniere.

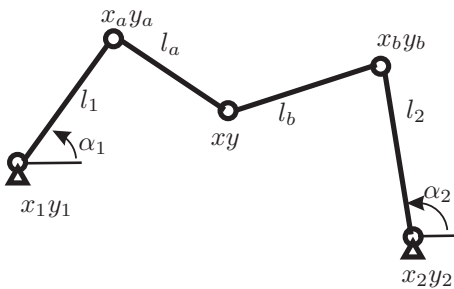


Figura K.4: Pentalatero tradizionale ad azionamenti angolari.

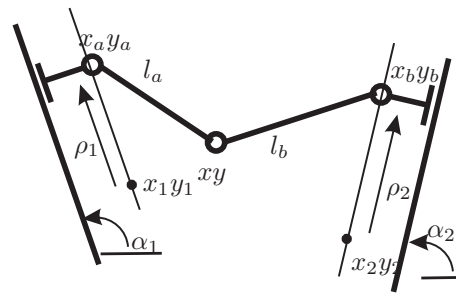


Figura K.5: Pentalatero ad azionamenti lineari.

La posizione dell'utensile si trova nell'intersezione di due circonferenze di centro  $x_a y_a$  e  $x_b y_b$  e raggio, rispettivamente,  $\rho_a$  e  $\rho_b$  (fig. K.2)

$$\begin{cases} \rho_a^2 = (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 \\ \rho_b^2 = (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 \end{cases} \quad (K.2)$$

È evidente che potranno esistere due possibili configurazioni corrispondenti alle due intersezioni. Questo procedimento risolve il problema cinematico diretto. Le due soluzioni potranno essere coincidenti qualora le due cerniere a terra distino esattamente quanto il valore  $d$  pari alla somma delle lunghezze due aste  $d = \rho_a + \rho_b$  o alla loro differenza  $d = |\rho_a - \rho_b|$  (fig. K.3); in questo caso avremo una configurazione singolare per la cinematica diretta (cerchi tangenti). In questo caso i due motori non saranno in grado di controllare il movimento dell'utensile in direzione normale a quella delle due aste allineate; una forza applicata all'utensile in direzione ortogonale alle aste provoca in esse forze infinite.

La cinematica inversa è invece risolta da una semplice trasformazione delle eq.(K.2)

$$\begin{cases} \rho_a = \pm \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2} \\ \rho_b = \pm \sqrt{(x - x_b)^2 + (y - y_b)^2} \end{cases} \quad (K.3)$$

Esistono 4 soluzioni (combinazioni di lunghezze positive o negative); la configurazioni singolari sono quelle con  $\rho_a = 0$ , oppure con  $\rho_b = 0$ ; infatti in questi casi 2 soluzioni coincidono. In queste configurazioni singolari l'asta a lunghezza nulla può liberamente ruotare su se stessa senza vincoli.

Questo manipolatore è uno di quelli in cui è più semplice risolvere la cinematica diretta, che quella inversa.

## K.2 Pentolatero classico

In questo pentalatero i due motori rotativi azionano le due aste incernierate nei punti  $x_1 y_1$  e  $x_2 y_2$  (spalle) la cui posizione angolare è indicata dagli angoli  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Le coordinate ai giunti  $Q$  e nello spazio di lavoro

$S$  sono

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{K.4})$$

La posizione delle due cerniere intermedie (gomiti) è indicata dalle coordinate  $x_a y_a$  e  $x_b y_b$  che si determinano facilmente come

$$\begin{aligned} x_a &= x_1 + l_1 \cos(\alpha_1) & x_b &= x_2 + l_2 \cos(\alpha_2) \\ y_a &= y_1 + l_1 \sin(\alpha_1) & y_b &= y_2 + l_2 \sin(\alpha_2) \end{aligned} \quad (\text{K.5})$$

La posizione dell'utensile si trova nell'intersezione di due circonferenze di centro  $x_a y_a$  e  $x_b y_b$  e raggio, rispettivamente,  $l_a$  e  $l_b$  (fig. K.6)

$$\begin{cases} l_a^2 = (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 \\ l_b^2 = (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 \end{cases} \quad (\text{K.6})$$

È evidente che si troveranno due soluzioni corrispondenti alle due intersezioni. Questo procedimento risolve il problema cinematico diretto. Le due soluzioni potranno essere coincidenti qualora i due gomiti distino esattamente quanto il valore  $d$  pari alla somma delle due aste  $d = l_a + l_b$  o alla loro differenza  $d = |l_a - l_b|$  (fig. K.8); in questo caso avremo una configurazione singolare per la cinematica diretta (cerchi tangenti). In questo caso i due motori non saranno in grado di controllare il movimento dell'utensile in direzione normale a quella delle due aste allineate; una forza applicata all'utensile in direzione ortogonale alle aste provoca in esse forze infinite. Ovviamente non è possibile azionare il pentalatero in modo da allontanare maggiormente i due gomiti (cerchi non intersecanti).

Per passare da una delle due configurazioni all'altra è necessario che il polso attraversi la configurazione singolare, operazione difficile da compiere per le difficoltà di controllo.

Per risolvere il problema cinematico inverso si osserva che una volta nota la posizione  $xy$  dell'utensile, quella del gomito  $x_a y_a$  è determinata dall'intersezione di due cerchi. Il primo cerchio ha centro  $xy$  e raggio  $l_a$ , mentre il secondo ha centro  $x_1 y_1$  e raggio  $l_1$  (fig. K.7); l'angolo  $\alpha_1$  si determina quindi con un arcotangente

$$\begin{cases} l_a^2 = (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 \\ l_1^2 = (x_1 - x_a)^2 + (y_1 - y_a)^2 \end{cases} \quad \alpha_1 = \text{atan2}(y_a - y_1, x_a - x_1) \quad (\text{K.7})$$

Analogamente si ragiona per l'altro braccio determinando  $\alpha_2$ . In generale, per ogni braccio, si avranno due soluzioni corrispondenti alle due intersezioni dei cerchi. Le due soluzioni potranno coincidere qualora le due aste di un braccio si allineino (cerchi tangenti); questa situazione corrisponde ad una configurazione singolare per la cinematica inversa (fig. K.9). In questa configurazione un movimento infinitesimo di un motore non determina cambiamenti della posizione dell'utensile che quindi localmente perde un grado di libertà. La mancata intersezione dei cerchi indica che il punto  $xy$  è fuori dallo spazio di lavoro del manipolatore.

Si hanno due possibili soluzioni per ciascun braccio e quindi, in totale, 4 soluzioni per il manipolatore.

Lo studio delle velocità ed accelerazioni può essere fatto risolvendo la cinematica diretta e/o inversa  $S = F(Q)$ ,  $Q = G(S)$  ed effettuando la derivazione rispetto al tempo previo calcolo dello jacobiano  $J = \partial F / \partial Q$ ,  $J^{-1} = \partial G / \partial S$ . In alternativa si può utilizzare la metodologia descritta al §8.8 pag.218 basata su una diversa forma dell'equazione cinematica descritta dall'eq. (8.2) che nel nostro caso si ottiene combinando le equazioni K.5 e K.6

$$F(S, Q) = \begin{bmatrix} (x - (x_1 + l_1 \cos(\alpha_1)))^2 + (y - (y_1 + l_1 \sin(\alpha_1)))^2 - l_a^2 \\ (x - (x_2 + l_2 \cos(\alpha_2)))^2 + (y - (y_2 + l_2 \sin(\alpha_2)))^2 - l_b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{K.8})$$

per cui

$$J_s = \frac{\partial F}{\partial S} = 2 \begin{bmatrix} x - (x_1 + l_1 \cos(\alpha_1)) & y - (y_1 + l_1 \sin(\alpha_1)) \\ x - (x_2 + l_2 \cos(\alpha_2)) & y - (y_2 + l_2 \sin(\alpha_2)) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x - x_a & y - y_a \\ x - x_b & y - y_b \end{bmatrix} \quad (\text{K.9})$$

$$J_q = -\frac{\partial F}{\partial q} = -2 \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (\text{K.10})$$

con

$$\begin{aligned}
 A &= ((x - x_1 - l_1 \cos(\alpha_1)) \sin(\alpha_1) - (y - y_1 - l_1 \sin(\alpha_1)) \cos(\alpha_1)) l_a \\
 &= ((x - x_a) \sin(\alpha_1) - (y - y_a) \cos(\alpha_1)) l_a \\
 B &= ((x - x_2 - l_2 \cos(\alpha_2)) \sin(\alpha_2) - (x - y_2 - l_2 \sin(\alpha_2)) \sin(\alpha_2)) l_b \\
 &= ((x - x_b) \sin(\alpha_2) - (x - y_b) \cos(\alpha_2)) l_b
 \end{aligned} \tag{K.11}$$

È abbastanza facile dimostrare che il determinante dello jacobiano  $J_s$  si annulla quando sono allineati i tre punti  $x_a y_a, xy, x_b y_b$  (configurazione singolare per la cinematica diretta); invece il determinante di  $J_q$  si annulla quando si allineano i punti  $x_1 y_1, x_a y_a, xy$  oppure i punti  $x_2 y_2, x_b y_b, xy$  (configurazioni singolari per la cinematica inversa).

### K.3 Pentalatero con azionamenti lineari

In questa versione del pentalatero, la posizione dei gomiti è determinata dalla movimentazione degli azionamenti lineari. Le coordinate ai giunti  $Q$  e nello spazio di lavoro  $S$  sono

$$Q = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{K.12}$$

La posizione delle due cerniere intermedie (gomiti) è indicata dalle coordinate  $x_a y_a$  e  $x_b y_b$  che si determinano facilmente come

$$\begin{aligned}
 x_a &= x_1 + \rho_1 \cos(\alpha_1) & x_b &= x_2 + \rho_2 \cos(\alpha_2) \\
 y_a &= y_1 + \rho_1 \sin(\alpha_1) & y_b &= y_2 + \rho_2 \sin(\alpha_2)
 \end{aligned} \tag{K.13}$$

ove  $x_1, y_1$  sono le coordinate di un punto arbitrario, assunto come origine del movimento, che si trova sulla retta di inclinazione  $\alpha_1$  che contiene il movimento della cerniera di coordinate  $x_a y_a$ ; analogamente  $x_2, y_2$  è l'origine della retta di inclinazione  $\alpha_2$  su cui scorre  $x_b y_b$ .

La posizione dell'utensile, si trova dall'intersezione di due circonferenze di centro  $x_a y_a$  e  $x_b y_b$  e raggio, rispettivamente,  $l_a$  e  $l_b$  come già visto per il pentalatero tradizionale (eq. K.6), risolvendo così il problema cinematico diretto. Anche in questo caso si possono avere due soluzioni, oppure una (configurazione singolare), oppure nessuna.

La soluzione della cinematica inversa invece si ottiene per ciascun braccio come intersezione tra le rette degli azionamenti lineari (eq. K.13) e i due cerchi di centro  $xy$ , raggio pari a  $l_a$  (oppure  $l_b$  per l'altro braccio) descritti dalle eq. K.6. Si ottengono due equazioni di secondo grado in  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Si hanno due possibili soluzioni per ciascun braccio e quindi, in totale, 4 soluzioni per il manipolatore.

Le configurazioni singolari per la cinematica inversa accadono quando uno (o entrambi) i bracci sono ortogonali alle rispettive guide lineari e le equazioni di 2° grado hanno soluzioni reali coincidenti (retta tangente al cerchio). Ovviamente non si hanno soluzioni reali se il polso è troppo lontano dalle guide.

Lo studio delle velocità, accelerazioni e configurazioni singolari può essere svolto anche con l'impiego degli jacobiani  $J_s$  e  $J_q$  analogamente a come visto per il pentalatero tradizionale.

### K.4 Spazio di lavoro

Lo spazio di lavoro del pentalatero tradizionale si determina osservando che ciascuno dei due bracci del pentalatero tradizionale ha la stessa struttura cinematica del robot scara. Pertanto, considerando il primo braccio, si deduce che il polso è costretto a stare nella corona circolare di centro  $x_1 y_1$ , raggio minore  $r_1 = l_1 + l_a$ , e raggio maggiore  $R_1 = |l_1 - l_a|$ . Analogamente, considerando il secondo braccio, il polso è costretto a stare nella corona circolare di centro  $x_2 y_2$ , raggio minore  $r_2 = l_2 + l_b$ , e raggio maggiore  $R_2 = |l_2 - l_b|$ . Secondo le dimensioni delle aste e le posizioni delle cerniere a terra si possono ottenere diverse forme dello spazio di lavoro. Lo spazio di lavoro può essere unico o diviso in due zone. In questo caso se il polso si trova in una delle due zone non può essere spostato nell'altra a meno di smontare e rimontare il manipolatore (fig. K.10).

I bordi dell'area di lavoro corrispondono alla posizione del polso quando si trova nelle configurazioni singolari per la cinematica inversa. Il luogo delle posizioni singolari per la cinematica diretta è di forma complessa ed è una curva di 4° grado (verificare).

Lo spazio di lavoro si riduce se l'ampiezza del movimento dei motori è limitato da fine corsa.

Lo spazio di lavoro del pentalatero ad azionamenti lineari è un parallelogramma che si determina osservando che il polso deve stare in una fascia di semiampiezza  $l_a$  rispetto alla retta 1 su cui si muove il gomito

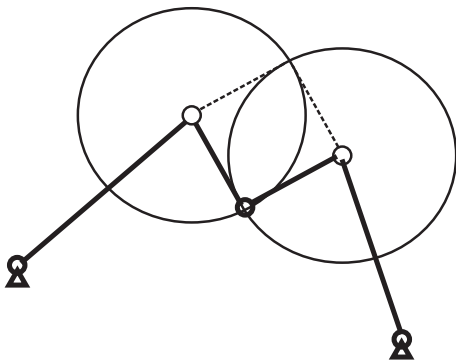


Figura K.6: Costruzione geometrica per la cinematica diretta del pentalatero tradizionale.

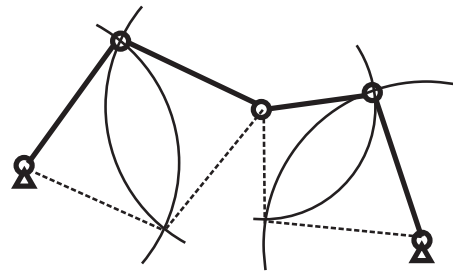


Figura K.7: Costruzione geometrica per la cinematica inversa del pentalatero tradizionale.

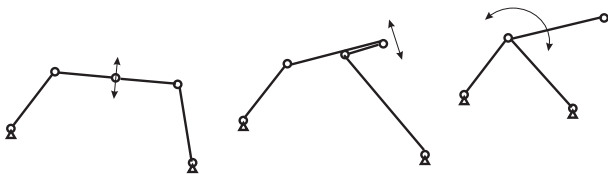


Figura K.8: Configurazioni singolari per la cinematica diretta del pentalatero tradizionale; nei 2 casi di sinistra e centro sono possibili movimenti infinitesimi, nel caso di destra sono possibili movimenti finiti.

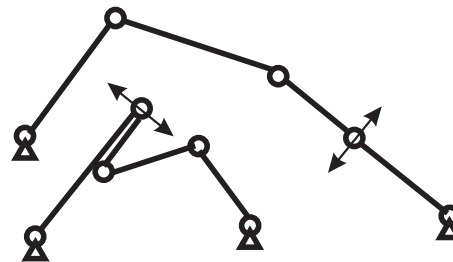


Figura K.9: Configurazioni singolari per la cinematica inversa del pentalatero ad azionamenti lineari.

$a$  e in una fascia di semiampiezza  $l_b$  rispetto alla retta 2 su cui scorre il gomito  $b$  (fig. K.11 a sinistra). I bordi del parallelogramma rappresentano il luogo dei punti (posizione del polso) nelle configurazioni di singolarità per la cinematica inversa; invece si dimostra che il luogo dei punti di singolarità per la cinematica diretta sono due ellissi (fig. K.11 a destra).

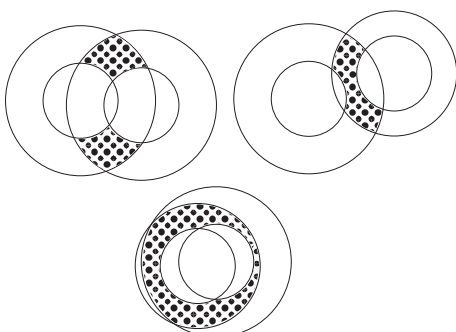


Figura K.10: Esempi di area di lavoro del pentalatero tradizionale.



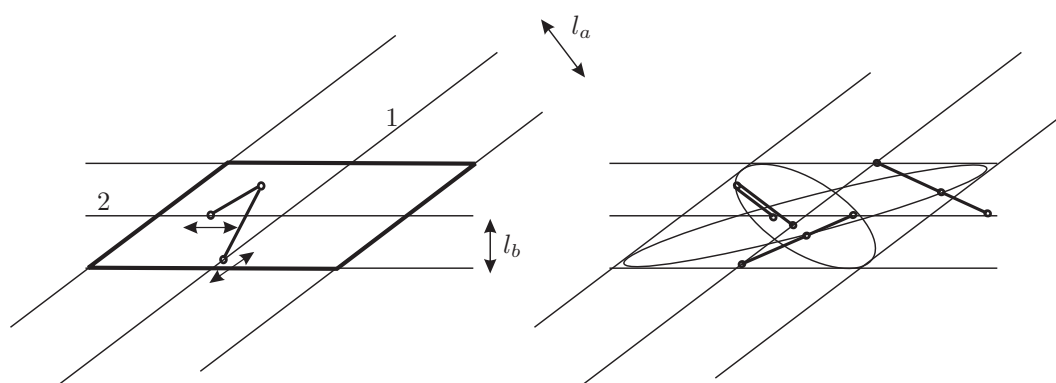


Figura K.11: Area di lavoro del pentalatero ad azionamenti lineari.